



شکل دادن فلزات



METAL Karaj-Group

www.metallurgy-karaj.vcp.ir

کاری از سید حامد میرغیاثی

کنکور کارشناسی ارشد

مهندسی مواد

کتاب چهارم

دروس تخصصی کارشناسی

(گرایش متالورژی صنعتی)

خلاصه مطالب درسی

نکات ویژه کنکوری

تست های طبقه بندی شده موضوعی کنکور کارشناسی ارشد
با پاسخ تشریحی

کنکور سراسری دانشگاه آزاد اسلامی

چاپ دوم



امیر مهدی همایون فکری

(رتبه اول کنکور کارشناسی ارشد)

انتشارات آزاده

فهرست مطالب

فصل اول: شکل دادن فلزات..... ۹	۱-۴-۷- کشش عمیق..... ۳۵
۱-۱- مقدمه..... ۹	۱-۵- تحلیل کران بالایی..... ۳۷
۱-۱-۱- تنش در یک نقطه..... ۹	۱-۵-۱- تحلیل کران بالایی (راه حل قابل قبول از لحاظ سینماتیک)..... ۳۷
۱-۱-۲- تنش در دو بعد..... ۱۰	۱-۵-۲- مصرف انرژی روی صفحه‌ای با برش گسسته..... ۴۸
۱-۱-۳- دایره مورتنش در دو بعد..... ۱۱	۱-۶- نظریه میدان خط لغزش..... ۵۰
۱-۱-۴- حالت تنش در سه بعد و تانسور تنش..... ۱۳	۱-۶-۱- معادله‌های تنش..... ۵۲
۱-۱-۵- مؤلفه‌های هیدرواستاتیک و انحرافی تنش..... ۱۵	۱-۶-۲- شرایط مرزی..... ۵۶
۱-۱-۶- کرنش..... ۱۵	
۱-۱-۷- روابط تنش - کرنش کشسان..... ۱۶	
۱-۱-۸- تانسور کرنش..... ۱۸	
۱-۱-۹- لوله‌های جدارنازک..... ۱۸	
۱-۱-۱۰- کار کشسان یا انرژی کرنش..... ۱۹	
۲-۱- معیارهای تسلیم فلزات..... ۲۰	
۲-۱-۱- معیار رانکین..... ۲۰	
۲-۱-۲- نظریه سنت - ونانت یا نظریه کرنش خطی ماکزیمم..... ۲۱	
۲-۱-۳- معیار ترسکا..... ۲۲	
۲-۱-۴- نظریه انرژی کرنشی ماکزیمم یا نظریه بلترامی..... ۲۳	
۲-۱-۵- معیار قون میزز..... ۲۴	
۲-۱-۶- کار مومسان..... ۲۶	
۲-۱-۷- تنش مؤثر..... ۲۶	
۲-۱-۸- کرنش مؤثر..... ۲۷	
۲-۱-۹- آهنگ کرنش و دما..... ۲۷	
۳-۱- کار ایده‌آل یا انرژی یکنواخت..... ۲۸	
۳-۱-۱- اصطکاک، کار اضافی و بازده مکانیکی..... ۲۹	
۳-۱-۲- ماکزیمم کاهش سطح مقطع در عملیات کشش..... ۲۹	
۳-۱-۳- اثر نیم زاویه جدید بر کار همگن، کار اصطکاکی و کار اضافی..... ۳۰	
۴-۱- فرآیندهای شکل دادن فلزات..... ۳۰	
۴-۱-۱- کشش ورق..... ۳۰	
۴-۱-۲- کشش سیم یا مفتول..... ۳۲	
۴-۱-۳- فرآیندهای کشیدن لوله..... ۳۲	
۴-۱-۴-۱- تویی کشی..... ۳۳	
۴-۱-۴-۲- سنبه کشی..... ۳۴	
۴-۱-۴-۳- فروکشی..... ۳۴	
۴-۱-۴-۴- اکستروژن..... ۳۵	
۴-۱-۵- آهنگری (فورج)..... ۳۷	
۴-۱-۵-۱- دسته بندی فرآیندهای آهنگری (فورجینگ)..... ۳۷	
۴-۱-۵-۲- آهنگری در شرایط کرنش صفحه‌ای..... ۳۹	
۴-۱-۵-۳- تنش برشی ثابت در فصل مشترک..... ۴۲	
۴-۱-۵-۴- آهنگری در شرایط تقارن محوری..... ۴۲	
۴-۱-۶- نورد..... ۴۳	

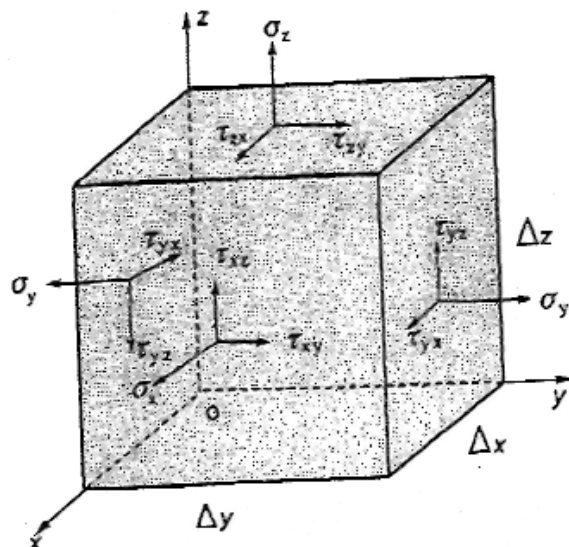
شکل دادن فلزات

۱

۱-۱-۱- مقدمه

۱-۱-۱- تنش در یک نقطه

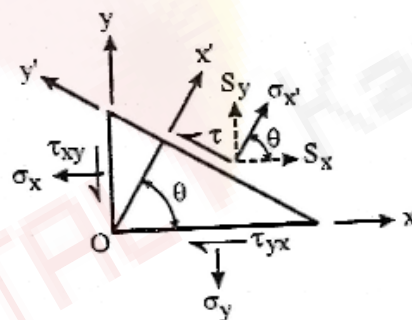
تنش عبارت است از نیرو تقسیم بر واحد سطح. هر تنشی در یک نقطه به مؤلفه‌های عمودی و برشی تجزیه می‌شود. تنشهای عمود وارد بر وجود یک عنصر مکعبی شکل با زیرنویس شاخص جهت معین شده‌اند. مثلاً σ_x تنش عمود وارد در جهت x است چون σ_x یک تنش عمود است، باید به روی صفحه‌ای عمود بر جهت x وارد شود. طبق قرارداد مقادیر تنشهای عمود بزرگتر از صفر معرف کشش و مقادیر کوچکتر از صفر نشان دهنده فشار هستند. برای تنشهای برشی دو زیرنویس به کار می‌رود. معرف اول زیرنویس، نشان دهنده صفحه‌ای است که تنش بر آن وارد می‌شود و حرف دوم نشان دهنده جهت اعمال تنش می‌باشد. مثلاً τ_{yz} تنش برشی روی صفحه عمود بر محور y و در جهت محور z است و τ_{xy} تنش برشی روی صفحه عمود بر محور x و در جهت محور y است شکل (۱-۱).



شکل ۱-۱) تنش‌های وارد بر یک عنصر مکعبی واحد

۱-۲- تنش در دو بعد

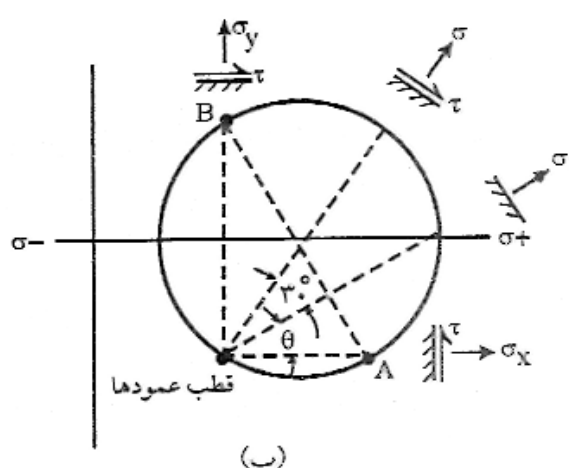
حالت تنش دو بعدی در عمل، هنگامی به وجود می‌آید که یکی از ابعاد جسم نسبت به دو بعد دیگر کوچک باشد. حالت تنشی که در آن تنش‌ها در یکی از جهات اولیه صفر باشد، تنش صفحه‌ای نامیده می‌شود. شکل (۱-۲) ورق نازکی را نشان می‌دهد که ضخامت آن عمود بر صفحه کاغذ است. اگر نقطه O واقع بر ورق باشد و خط عمود بر صفحه شیبدار با محور x (جهت اصلی) زاویه θ بسازد، محور عمود بر سطح شیبدار را جهت x' و جهت واقع بر صفحه شیبدار را y' می‌نامیم. اگر σ_x و σ_y مؤلفه‌های تنش کل، وارد بر سطح شیبدار باشند می‌توان نوشت:



شکل ۱-۲) حالت تنش در دو بعد

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (1-1)$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (2-1)$$



شکل ۱-۳-الف) دایره مور برای حالت تنش دو بعدی (ب) دایره مور با استفاده از قطب برای عمودها

اگر زاویه θ چنان انتخاب شود که $\tau_{x'y'} = 0$ شود، داریم:

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (7-1)$$

و مقادیر تنش‌های اصلی σ_1 و σ_2 که در دستگاه مختصات آنها، تنشهای برشی صفر است، برابر است با:

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (8-1)$$

برای یافتن صفحاتی که در آنها $\tau_{x'y'}$ ماکزیمم است داریم:

$$\frac{\partial \tau_{x'y'}}{\partial \theta'} = 0 \Rightarrow \tan 2\theta' = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad (9-1)$$

با مقایسه (۷-۱) و (۹-۱) مشخص می‌شود $\theta' = \frac{\pi}{4} - \theta$ و این به آن معناست که زاویه بین صفحاتی که تنش برشی ماکزیمم دارند با صفحاتی که تنش برشی در آنها صفر است، برابر ۴۵ درجه است. مقدار تنش برشی ماکزیمم که شعاع دایره مور نیز هست، برابر است با:

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (10-1)$$

زمانی که تنش برشی ماکزیمم است، مقدار تنش عمودی برابر $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ است که همان طول مرکز دایره مور بر روی محور σ می‌باشد.

$$\tau_{x'y'} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (3-1)$$

این معادلات، معادلات تبدیل تنش هستند و اگر تنش‌ها در سیستم مختصات xy و زاویه θ مشخص باشند، تنش‌ها را در سیستم مختصات $x'y'$ تعیین می‌کنند.

۱-۳- دایره مورتنش در دو بعد

با تبدیل معادلات تنش (۱-۱) و (۲-۱) می‌توان به معادلات زیر رسید:

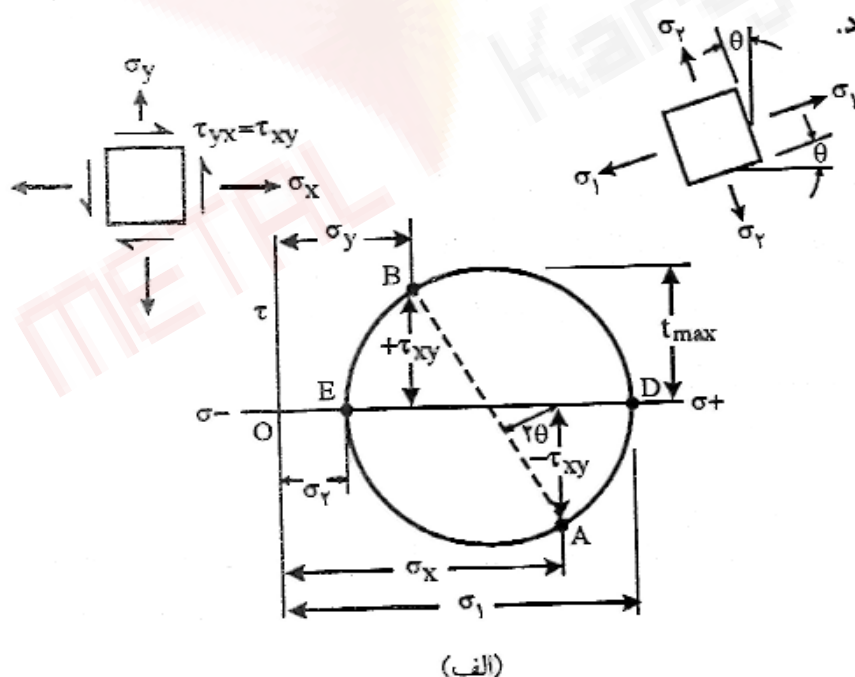
$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (4-1)$$

$$\tau_{x'y'} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (5-1)$$

اگر معادلات به دست آمده را به توان دو برسانیم و با هم جمع کنیم $\sigma_{x'}$ را بر حسب $\tau_{y'x'}$ به دست می‌آوریم:

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (6-1)$$

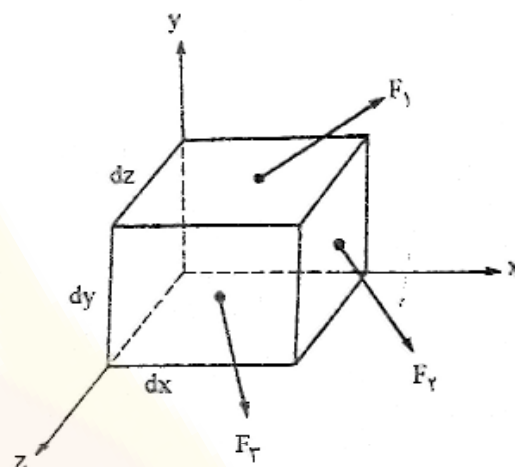
معادله (۶-۱) دایره‌ای به شکل $(x-h)^2 + y^2 = r^2$ است. بنابراین دایره مور دایره‌ای است به مختصات $\sigma_{x'}$ و $\tau_{x'y'}$ که شعاع آن برابر τ_{max} بوده و مرکز آن به فاصله $\frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2}$ در طرف راست مبدأ قرار دارد.



(الف)

۱-۱-۴. حالت تنش در سه بعد و تانسور تنش

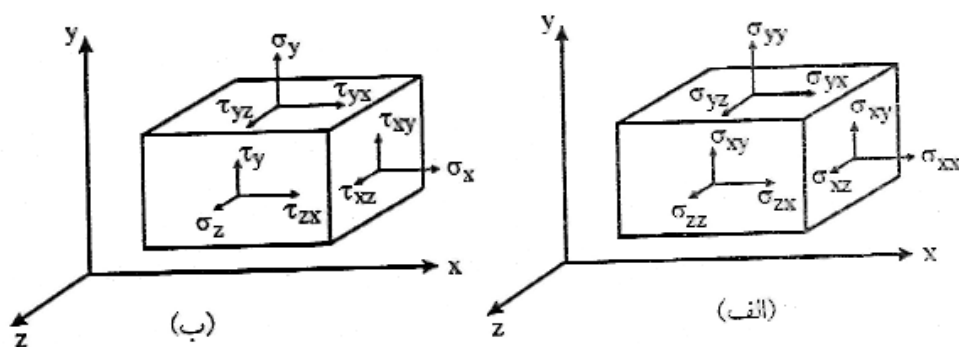
حالت کلی تنش سه بعدی، شامل سه تنش اصلی نابرابر وارد بر یک نقطه است. این حالت، تنش سه بعدی نامیده می‌شود. اگر دو تنش از سه تنش اصلی برابر باشند، این حالت، تنش استوانه‌ای نامیده می‌شود در حالی که اگر هر سه تنش مساوی باشند حالت، تنش هیدرواستاتیک یا کروی است. تعیین تنشهای اصلی در حالت تنش سه بعدی، بر حسب تنش‌های وارد بر یک سیستم مختصات کارتزین یا استوانه‌ای، در واقع بسط روش تنش دو بعدی است.



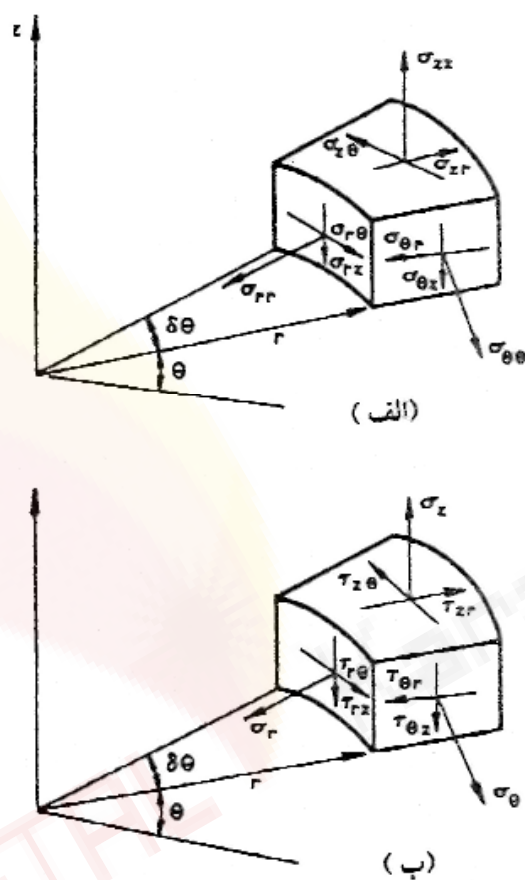
شکل ۱-۴ نیروهای کلی وارد بر یک جسم کوچک

اگر یک نقطه را با جسمی کوچک (به ابعاد dx ، dy ، dz) نشان دهیم که در حال تعادل است (شکل ۱-۴) آنگاه در کلی‌ترین حالت، ممکن است هر وجه از این جسم، مطابق شکل در معرض نیروهای کل F_1 ، F_2 و F_3 باشد. هریک از این نیروها را می‌توان به مؤلفه‌هایی موازی با سه محور مختصات تجزیه کرد و اگر هریک از این ۹ مؤلفه بر سطح وجهی که بر آن وارد می‌شوند، تقسیم شوند، آنگاه حالت کلی تنش در یک نقطه را می‌توان با ۹ مؤلفه نشان داده شده در شکل (۱-۵) توصیف کرد. این مجموعه از تنشها را تانسور تنش می‌نامند و آن را با σ_{ij} نشان می‌دهند. در نمادگذاری تانسوری σ_{ij} چنین بیان می‌شود:

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (1-11)$$



شکل ۱-۵) مؤلفه‌های تنش در دستگاه مختصات کارتزین



شکل ۱-۶) مؤلفه‌های تنش در دستگاه مختصات استوانه‌ای

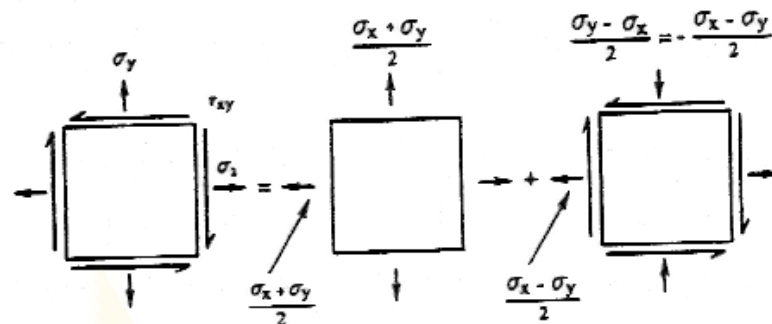
برقراری تعادل به معنای نبود آثار چرخشی حول هر محور است. بنابراین:

$$M_{\tau_{xy}} = M_{\tau_{yx}} \Rightarrow \tau_{xy} \cdot dy \cdot dz \cdot dx = \tau_{yx} \cdot dx \cdot dz \cdot dy \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

به این ترتیب ۹ مؤلفه تنش به شش مؤلفه مستقل کاهش می‌یابند.

۱-۱-۵- مؤلفه‌های هیدرواستاتیک و انحرافی تنش

تانسور تنش کلی به یک تانسور تنش هیدرواستاتیک، یا تنش متوسط (σ_m) که فقط شامل کشش یا فشار خالص است و یک تانسور تنش انحرافی (σ'_{ij}) که نشان‌دهنده تنش‌های برشی موجود در تنش کلی است. (شکل ۷-۱) تقسیم می‌شود. مؤلفه هیدرواستاتیک تانسور تنش فقط تغییرات حجمی کشسان تولید کرده و باعث تغییر شکل مومسان نمی‌شود. تنش انحرافی شامل تنش‌های برشی است که موجب تغییر شکل مومسان فلز می‌شود.



تنش انحرافی + تنش هیدرواستاتیک = تنش کل

شکل ۷-۱ تجزیه تنش کل به تنش‌های هیدرواستاتیک و انحرافی

تنش هیدرواستاتیک از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (۱۲-۱)$$

در نتیجه، تجزیه تانسور تنش کلی چنین خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z}{3} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \frac{\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z}{3} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \frac{\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y}{3} \end{bmatrix} \quad (۱۳-۱)$$

۱-۱-۶- کرنش

هنگامی که جسمی جامد تغییر شکل می‌دهد، نقاط آن جسم جابجا می‌شوند. کرنش بر حسب این جابجاییها تعریف می‌شود اما به روشی که آثار حرکت جسم صلب، از قبیل انتقال محض یا چرخش محض به حساب نیایند. اگر طول اولیه جسم l_0 و طول ثانویه آن l باشد، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 e &= \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} \quad \text{کرنش مهندسی} \\
 \varepsilon &= \ln \frac{l}{l_0} \quad \text{کرنش حقیقی}
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \text{کرنش خطی (طولی) که ناشی از } \sigma \text{ است} \\ \text{کرنش برشی (زاویه‌ای یا لغزشی) که ناشی از تنش } \tau \text{ است. } \gamma_{ij} \end{array} \right\} \text{کرنش (تغییر فرم)}$$

کار کردن با کرنشهای حقیقی بهتر از کرنشهای مهندسی است. زیرا:

۱- کرنشهای حقیقی برای تغییر شکل معادل در فشار و کشش برابرند و تنها علامتهای آنها بر عکس است.

۲- کرنشهای حقیقی جمع پذیرند. کرنش حقیقی کل با مجموع کرنشهای حقیقی جزء برابر است.

۳- تغییر حجم به مجموع سه کرنش قائم مربوط می شود و حجم ثابت می ماند.

اگر کرنشها کوچک باشند، آن گاه کرنشهای مهندسی و حقیقی تقریباً برابرند. از معادله زیر:

$$\varepsilon = \ln \left[\frac{l_0 + \Delta l}{l_0} \right] = \ln \left[1 + \frac{\Delta l}{l_0} \right] = \ln(1 + e) \quad (14-1)$$

بسط سری زیر نتیجه می شود:

$$\varepsilon = e - \frac{e^2}{2} + \frac{e^3}{3!} + \dots \quad (15-1)$$

بنابراین اگر $e \rightarrow 0$ آنگاه $\varepsilon \rightarrow e$

۱-۱-۷- روابط تنش - کرنش کشسان

تنش کشسان طبق قانون هوک برابر حاصلضرب مدول کشسانی در کرنش کشسان است:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad (16-1)$$

وقتی یک نیروی کششی در جهت x به جسم وارد شود و در آن جهت در جسم ازدیاد طول وجود آید، جسم در جهات y و z منقبض می شود. تجربه نشان داده است که کرنش عرضی بخش ثابتی از کرنش در جهت طول است. این رابطه نسبت پواسون نامیده شده و با علامت ν مشخص می شود:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (17-1)$$

ضریب پواسون یک ماده کشسان کاملاً همسانگر ۰/۲۵ است ولی برای بیشتر فلزات مقدار ν در حدود ۰/۳۳ است.

با انطباق مؤلفه های کرنش در جهات x و y و z خواهیم داشت:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (18-1)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \quad (19-1)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (20-1)$$

از دیگر اعداد ثابت، مدول جسم یا مدول حجمی کشسانی است. مدول جسم نسبت فشار هیدرواستاتیک به انبساط ایجاد شده توسط آن است:

$$K = \frac{\sigma_m}{\Delta} = \frac{-p}{\Delta} = \frac{1}{\beta} \quad (21-1)$$

که در آن Δ برای مقادیر کم $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ و p فشار هیدرواستاتیک و β قابلیت فشردگی نامیده می‌شوند.

روابط مفید زیادی را می‌توان از ثوابت کشسان K ، ν ، G و E استخراج کرد.

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1 - 2\nu}{E} (3\sigma_m) \quad (22-1)$$

$$\Delta = \frac{1 - 2\nu}{E} (3\sigma_m) \quad (23-1)$$

$$K = \frac{\sigma_m}{\Delta} = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (24-1)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (25-1)$$

در حالت تنش صفحه‌ای ($\sigma_3 = 0$) روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) \quad (26-1)$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) \quad (27-1)$$

و در حالت کرنش صفحه‌ای ($\varepsilon_3 = 0$) داریم:

$$\sigma_3 = \nu(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (28-1)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2)\sigma_1 - \nu(1 + \nu)\sigma_2] \quad (29-1)$$

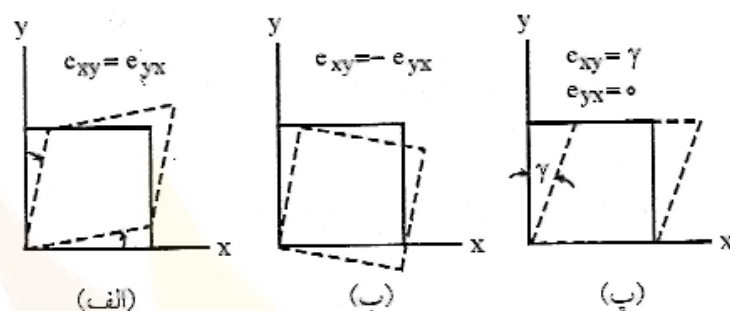
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2)\sigma_2 - \nu(1 + \nu)\sigma_1] \quad (30-1)$$

۱-۱-۸- تانسور کرنش

درست همانطور که تانسور تنش را توصیف کردیم، می توان به صورت مشابه زیر برای توصیف کرنشها استفاده کنیم:

$$e_{ij} = \begin{vmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{vmatrix} \quad (31-1)$$

نکته مهمی که وجود دارد این است که کرنش برشی تانسوری e_{xy} معادل $\frac{1}{\gamma} \gamma_{xy}$ است و در این مورد شکل (۸-۱) کمک خوبی است.



شکل ۱-۸) مثالهایی از جابجایی همراه با برش و چرخش، (الف) برش خالص بدون چرخش (ب) چرخش خالص بدون برش (پ) برش ساده

جزئی در معرض برش خالص قرار می گیرد، واپیچش سبب ایجاد تغییرات زاویه ای معادلی می شود. چون کرنش کل یا کرنش مهندسی برابر γ است، کرنش برشی وجوه مجاور، مطابق شکل، برابر $\frac{\gamma}{2}$ خواهد بود.

۱-۱-۹- لوله های جدار نازک

هرگاه در لوله ای به طور L و شعاع r و ضخامت جداره t ، نسبت شعاع به ضخامت جداره بیشتر از ۱۰ باشد، آن را لوله جدار نازک گویند.

در صورت اعمال فشار داخل به لوله جدار نازک، سه تنش طولی یا محوری σ_L ، محیطی یا حلقوی σ_θ و شعاعی σ_r بر آن اعمال می شود. بدیهی است که اگر لوله دو سر باز باشد $\sigma_L = \sigma_\theta = \sigma_r = 0$. اما اگر دو سر لوله بسته باشد و در معرض فشار داخلی p قرار گیرد، مقادیر سه گانه تنش چنین است:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{pr}{t} = \sigma_1 \\ \sigma_L &= \frac{pr}{2t} = \sigma_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sigma_\theta = 2\sigma_L \quad (32-1)$$

$$\sigma_r = p \ll \sigma_L < \sigma_\theta \Rightarrow \sigma_r \approx 0 = \sigma_r$$

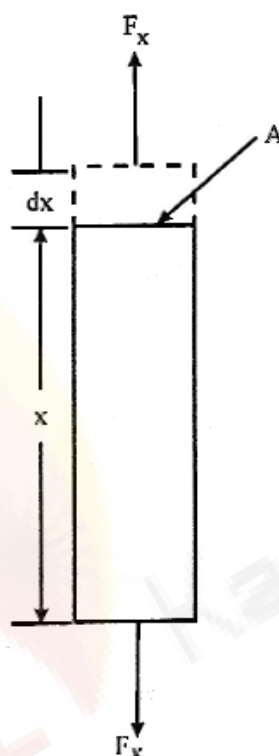
۱-۱-۱۰ کار کشسان یا انرژی کرنش

در شکل (۹-۱) میله‌ای به طول x و سطح مقطع A در معرض نیروی کششی F_x قرار دارد که سبب تغییر طول میله به اندازه dx می‌شود. کار جزیی dW برابر است با:

$$dW = F_x \cdot dx \quad (۳۳-۱)$$

و این کار در واحد حجم، یعنی dW برابر است با:

$$dw = \frac{dW}{x A} = \frac{F_x}{A} \left(\frac{dx}{x} \right) = \sigma_x de_x \quad (۳۴-۱)$$



شکل ۹-۱ اساس روش تحلیل انرژی کرنش یا کار کشسان در واحد حجم

برای تغییر شکل کشسان تحت کشش تک محوری $\sigma_x = E e_x$ با قرار دادن در معادله (۳۴-۱) و انتگرالگیری از معادله حاصل، نتیجه می‌شود:

$$w = \frac{\sigma_x e_x}{2} = \frac{E e_x^2}{2} \quad (۳۵-۱)$$

در کلی‌ترین حالت، سایر مؤلفه‌های تنش نیز کار انجام می‌دهند، در نتیجه:

$$w = \frac{1}{2} (\sigma_x e_x + \sigma_y e_y + \sigma_z e_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) \quad (۳۶-۱)$$

و اگر با تنشهای اصلی سر و کار داشته باشیم:

$$w = \frac{1}{\gamma} (\sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2 + \sigma_3 e_3) \quad (37-1)$$

و اگر با کرنشهای اصلی سر و کار داشته باشیم:

$$w = \frac{E}{\gamma} (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = \frac{1}{\gamma E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)$$

۱-۲- معیارهای تسلیم فلزات

- معیارهای تسلیم

هر معیار تسلیم یک عبارت ریاضی اصل موضوعی برای حالت‌های تنش است که سبب تسلیم یا آغاز تغییر شکل مومسان می‌شوند. برای اغلب فلزات انعطاف‌پذیر و همسانگرد، فرض‌های زیر در نظر گرفته می‌شود:

۱- اثر باوشینگ وجود ندارد، پس استحکام تسلیم در کشش و فشار برابر است.

۲- حجم ثابت می‌ماند، پس معادل مومسان نسبت پواسون برابر ۰/۵ است.

۳- مقدار تنش قائم میانگین، یعنی $\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$ بر تسلیم تأثیر نمی‌گذارد.

معیارهای تسلیم مختلفی ارائه شده‌اند، ولی مهمترین آنها متعلق به ترسکا و فون میز است. معیارهای تسلیم نقطه شروع شکل دادن فلزات را تشکیل می‌دهند و همچنین دامنه مفید عملکرد ساختاری را که مجاز به تغییر شکل دائمی نیستند، محدود می‌کند.

۱-۲-۱- معیار رانکین

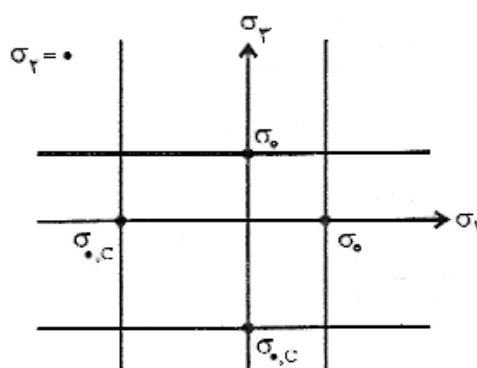
طبق معیار رانکین سیلان وقتی آغاز می‌شود یا تسلیم هنگامی رخ می‌دهد که یکی از تنش‌های نرمال یا قائم اصلی برابر تنش تسلیم در حالت کششی یا فشاری یک محوری شود.

σ_o : تنش تسلیم کششی یک محوری

$\sigma_{o,c}$: تنش تسلیم فشاری یک محوری

$$\text{معیار رانکین} \begin{cases} \sigma_1 = \sigma_o \\ \sigma_1 = \sigma_{o,c} \\ \sigma_3 = \sigma_o \\ \sigma_3 = \sigma_{o,c} \end{cases}$$

در شکل (۱-۱) این معیار به صورت مکان هندسی تسلیم در فضای تنش دو بعدی رسم شده است.



شکل ۱-۱۰ مکان هندسی تسلیم رانکین

در صورتیکه استحکام تسلیم در حالت کششی و فشاری را مساوی فرض کنیم یعنی $\sigma_o = |\sigma_{o,c}|$ در آن صورت چهار ضلعی رانکین تبدیل به یک مربع می شود.

۱-۲-۲- نظریه سنت - ونانت یا نظریه کرنش خطی ماکزیمم

در این معیار فرض می شود که تسلیم هنگامی رخ می دهد که یکی از کرنشهای خطی ماکزیمم (اصلی) برابر کرنش خطی تسلیم در حالت کششی یا فشاری یک محوری شود.

$$\varepsilon_o = \frac{\sigma_o}{E} \quad (38-1)$$

ε_o : کرنش خطی تسلیم در حالت کششی تک محوری σ_o : تنش تسلیم در حالت کششی تک محوری

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)) = \pm \frac{\sigma_o}{E} \quad (39-1)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)) = \pm \frac{\sigma_o}{E} \quad (40-1)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} (\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)) = \pm \frac{\sigma_o}{E} \quad (41-1)$$

که در آن ν ضریب پواسون است و ε_1 و ε_2 و ε_3 کرنشهای خطی اصلی و σ_1 و σ_2 و σ_3 تنشهای اصلی هستند. با فرض $\sigma_2 = 0$ و $\varepsilon_2 = 0$ خواهیم داشت:

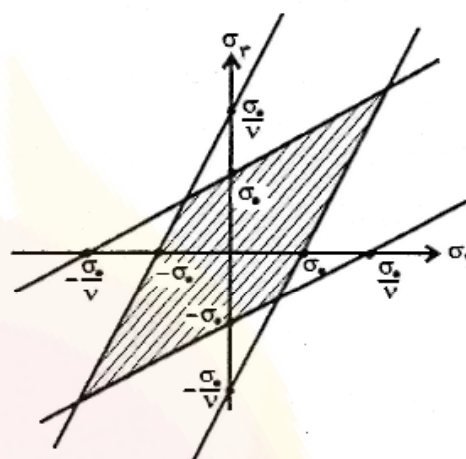
$$\sigma_1 - \nu\sigma_3 = \sigma_o \quad \begin{cases} \sigma_1 = 0 \Rightarrow \sigma_3 = -\frac{\sigma_o}{\nu} \\ \sigma_3 = 0 \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_o \end{cases} \quad (42-1)$$

$$\sigma_1 - \nu \sigma_r = -\sigma_o \quad \begin{cases} \sigma_1 = 0 \Rightarrow \sigma_r = \frac{\sigma_o}{\nu} \\ \sigma_r = 0 \Rightarrow \sigma_1 = -\sigma_o \end{cases} \quad (۴۳-۱)$$

$$\sigma_r - \nu \sigma_1 = \sigma_o \quad \begin{cases} \sigma_1 = 0 \Rightarrow \sigma_r = \sigma_o \\ \sigma_r = 0 \Rightarrow \sigma_1 = \frac{-\sigma_o}{\nu} \end{cases} \quad (۴۴-۱)$$

$$\sigma_r - \nu \sigma_1 = -\sigma_o \quad \begin{cases} \sigma_1 = 0 \Rightarrow \sigma_r = -\sigma_o \\ \sigma_r = 0 \Rightarrow \sigma_1 = \frac{\sigma_o}{\nu} \end{cases}$$

در شکل (۱۱-۱) این معیار به صورت مکان هندسی در فضای تنش دو بعدی رسم شده است:



شکل ۱-۱) چهارضلعی سنت - ونانت

۱-۲-۳- معیار ترسکا

در این معیار فرض می شود که تسلیم هنگامی رخ می دهد که تنش برشی به مقدار بحرانی برسد. هر جا ممکن باشد از قرارداد $\sigma_1 > \sigma_r > \sigma_r$ استفاده خواهد شد. بنا به این معیار، تسلیم هنگامی رخ می دهد که

$$\sigma_1 > \sigma_r > \sigma_r \quad \text{هرگاه} \quad \sigma_1 - \sigma_r = C \quad \text{یا} \quad \sigma_{max} - \sigma_{min} = C$$

برای تعیین C ، می توان از حالت کشش تک محوری استفاده کرد. در این حالت $\sigma_{max} = \sigma_1$ ، $\sigma_r = \sigma_r = 0$ و تسلیم هنگامی رخ می دهد که $\sigma_1 = Y$ که در آن Y استحکام تسلیم در کشش تک محوری است. پس

$$\sigma_1 - \sigma_r = Y = C \quad (۴۵-۱)$$

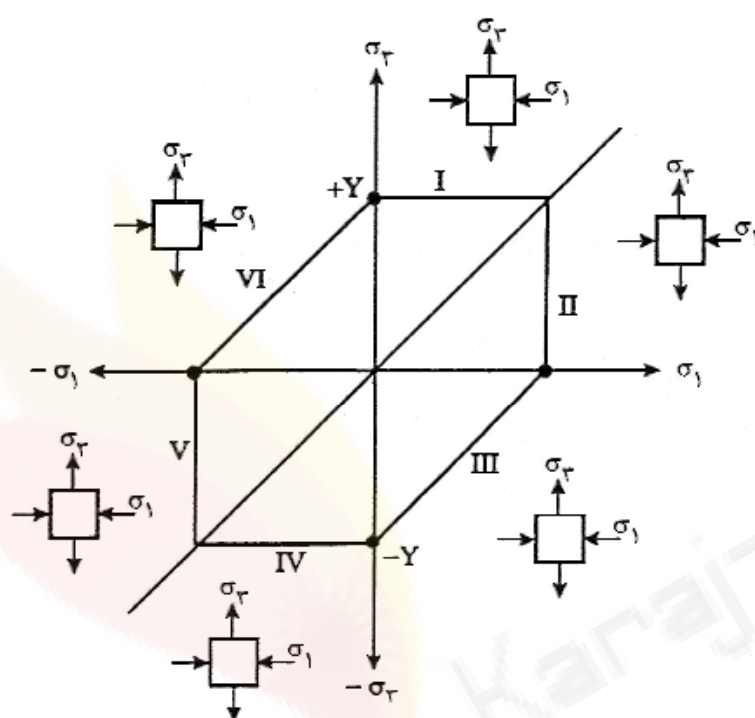
در حالت برشی محض، $\sigma_{\max} = \sigma_1$ ، $\sigma_{\min} = \sigma_3 = -\sigma_1$ و $\sigma_2 = 0$. تسلیم هنگامی رخ می‌دهد که تنش برشی ماکزیمم به استحکام تسلیم در برش محض، یعنی به استحکام تسلیم برشی K برسد. در آن زمان $\sigma_1 = K$. بنابراین

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\sigma_1 = 2K = C \quad (۴۶-۱)$$

و معیار ترسکا چنین نوشته می‌شود:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = Y = 2K \quad (۴۷-۱)$$

در شکل (۱۲-۱) این معیار به صورت مکان هندسی تسلیم در فضای تنش دو بعدی رسم شده است.



شکل ۱-۱۲ مکان هندسی معیار تسلیم ترسکا

در شش بخش نشان داده شده در شکل، شرایط زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & \sigma_3 > \sigma_1 > 0, \text{ پس } \sigma_3 = +Y \\ \text{II} \quad & \sigma_1 > \sigma_3 > 0, \text{ پس } \sigma_1 = +Y \\ \text{III} \quad & \sigma_1 > 0 > \sigma_3, \text{ پس } \sigma_1 - \sigma_3 = +Y \\ \text{IV} \quad & 0 > \sigma_1 > \sigma_3, \text{ پس } \sigma_3 = -Y \\ \text{V} \quad & 0 > \sigma_3 > \sigma_1, \text{ پس } \sigma_1 = -Y \\ \text{VI} \quad & \sigma_3 > 0 > \sigma_1, \text{ پس } \sigma_3 - \sigma_1 = +Y \end{aligned}$$

۴-۲-۱- نظریه انرژی کرنشی ماکزیمم یا نظریه بلترامی

طبق این نظریه، سیلان وقتی آغاز می‌شود که انرژی کرنش ماکزیمم برابر انرژی کرنشی تسلیم در حالت کششی یا فشاری یک محوری شود.

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3) = \frac{1}{2} \sigma_0 \epsilon_0 \quad (۴۸-۱)$$

با جایگذاری روابط (۳۸-۱)، (۳۹-۱)، (۴۰-۱) و (۴۱-۱) در رابطه بالا داریم:

$$\frac{1}{E} \left[\sigma_1 (\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)) + \sigma_2 (\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)) + \sigma_3 (\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)) \right] = \frac{1}{E} \sigma_0^2$$

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) = \sigma_0^2 \quad (49-1)$$

با فرض $\sigma_3 = 0$ داریم:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_2 = \sigma_0^2 \quad (50-1)$$

معادله (۵۰-۱) مکان هندسی یک بیضی است.

۵-۲-۱- معیار فون میز

در این معیار فرض می شود که تسلیم هنگامی رخ می دهد که ریشه میانگین مجذورهاى تنش برشی به مقداری ثابت برسد، یا

$$\left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{3} \right]^{\frac{1}{2}} = C_1 \quad (51-1)$$

یا به عبارت دیگر:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = C_2 \quad (52-1)$$

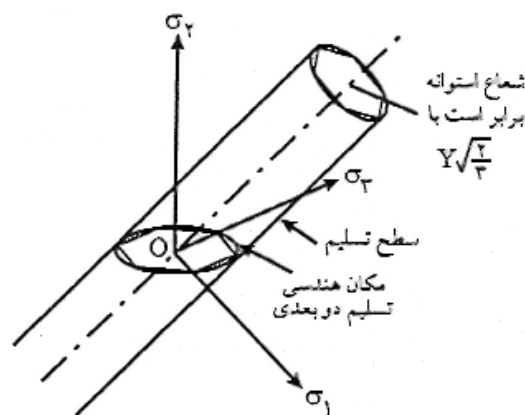
باز هم می توان برای تعیین C_2 از کشش تک محوری استفاده کرد. با قرار دادن $\sigma_1 = Y$ در نقطه تسلیم، و $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ، مقدار ثابت برابر $2Y^2$ بدست می آید. در برش محض، که $\sigma_1 = K = -\sigma_2$ و $\sigma_3 = 0$ داریم $C = 6K^2$ پس معیار فوق میز به صورت زیر بیان می شود:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2Y^2 = 6K^2 \quad (53-1)$$

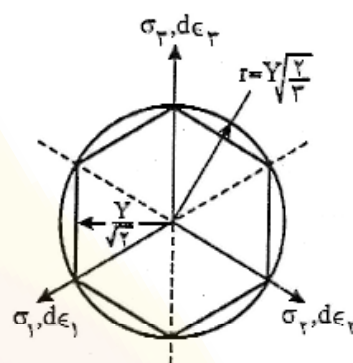
به صورتی کلی تر این معیار را می توان چنین نوشت:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = 2Y^2 = 6K^2 \quad (54-1)$$

در شکل (۱۳-۱) مکان هندسی تسلیم بر اساس این معیار و در شکل (۱۴-۱ الف) هر دو معیار ترسکا و فون میز به ازای یک مقدار Y ، به صورت برهم نهاده شده نشان داده شده است. توجه کنید که بیشترین اختلاف در پیشگویی تسلیم در امتداد مسیرهای بارگذاری ۲، $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ، -1 رخ می دهد.



شکل ۱-۱۴-ب) سطوح ترسیم ترسکا و فون میز در فضای تنش سه بعدی



شکل ۱-۱۵) سطوح تسلیم ترسکا و فون میز که روی صفحه‌ای تصویر شده‌اند که در آن: (مقدار ثابت $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 =$)

۱-۲-۶- کار مومسان

در کلی‌ترین حالت، هنگامی که سه نیروی قائم و سه نیروی برشی به طور همزمان عمل می‌کنند، کار کل در واحد حجم برابر است با:

$$dW = \sigma_x d\epsilon_x + \sigma_y d\epsilon_y + \sigma_z d\epsilon_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{yx} d\gamma_{yz} + \tau_{zx} d\gamma_{zx} \quad (55-1)$$

و بر حسب مؤلفه‌های اصلی داریم:

$$dW = \sigma_1 d\epsilon_1 + \sigma_2 d\epsilon_2 + \sigma_3 d\epsilon_3 \quad (56-1)$$

۱-۲-۷- تنش مؤثر

در مورد هر معیار تسلیم، تعریف تنش مؤثری که آن را $\bar{\sigma}$ می‌نامیم و تابعی است از تنشهای اعمال شده، سودمند است. اگر اندازه $\bar{\sigma}$ به مقدار بحرانی برسد، آنگاه حالت تنش اعمال شده سبب تسلیم می‌شود. در مورد معیار فوق میز

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (57-1)$$

اما در مورد معیار ترسکا

$$\bar{\sigma} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (58-1)$$

که در آن $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ است. در حالت کشش ساده برای هر دو معیار، $\bar{\sigma} = Y$ خواهد بود ولی در حالت برش خالص، برای معیار فون میز $\bar{\sigma} = \sqrt{3}K$ و برای معیار ترسکا $\bar{\sigma} = 2K$ می باشد.

۱-۲-۸- کرنش مؤثر

برای معیار فون میز، کرنش مؤثر از رابطه زیر بدست می آید:

$$d\bar{\epsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[(d\epsilon_1 - d\epsilon_2)^2 + (d\epsilon_2 - d\epsilon_3)^2 + (d\epsilon_3 - d\epsilon_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (59-1)$$

که می توان آن را به صورت ساده تر زیر بیان کرد:

$$d\bar{\epsilon} = \left[\frac{2}{3} (d\epsilon_1^2 + d\epsilon_2^2 + d\epsilon_3^2) \right]^{\frac{1}{2}}$$

اگر کرنش ها متناسب باشند (با نسبت تناسب $d\epsilon_1 : d\epsilon_2 : d\epsilon_3$) یعنی نسبت تنش ها تغییر نکند (ثابت $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$) کرنش مؤثر کل را می توان بر حسب کرنش های کل بیان کرد:

$$\bar{\epsilon} = \left[\frac{2}{3} (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (60-1)$$

کرنش مؤثر در معیار ترسکا برابر است با قدر مطلق بزرگ ترین کرنش اصلی:

$$\bar{\epsilon} = |\epsilon_i|_{max} \quad i = 1, 2, 3 \quad (61-1)$$

$$d\bar{\epsilon} = |d\epsilon_i|_{max}$$

می توان رابطه زیر را بین تنش های اصلی، تنش و کرنش مؤثر و کرنش های اصلی نوشت:

$$d\epsilon_1 = \frac{d\bar{\epsilon}}{d\bar{\sigma}} \left[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right] \quad (62-1)$$

۱-۲-۹- آهنگ کرنش و دما

- افزایش دما در حین تغییر شکل

بر اثر انجام کار مکانیکی روی فلز در حین تغییر شکل، دمای فلز افزایش می یابد. تنها اندکی از انرژی مکانیکی که برای تغییر شکل مصرف می شود، به صورت نابجایی ها ذخیره می شود و باقی مانده

آن به صورت گرما آزاد می شود. اگر تغییر شکل آدیاباتیک باشد، میزان افزایش دما از رابطه زیر بدست می آید:

$$\Delta T = \frac{\alpha \int \bar{\sigma} d\bar{\epsilon}}{\rho C} = \frac{\alpha \bar{\sigma}_a \bar{\epsilon}}{\rho C} \quad (۶۳-۱)$$

که در آن تنش میانگین در فاصله کرنش صفر تا ϵ ، چگالی فلز و C ظرفیت گرمایی فلز می باشد و α درصدی از انرژی است که صرف تغییر شکل فلز شده و در آن ذخیره شده است.

۱-۳- کار ایده آل یا انرژی یکنواخت

ساده ترین روش تعیین نیرو، استفاده از تراز کار یا انرژی است. بدین منظور باید کار خارجی را با انرژی مصرف شده برای تغییر شکل قطعه برابر نهاد. در این حالت از آثار اصطکاک و تغییر شکل ناهمگن چشمپوشی می شود. برای استفاده از این روش، باید فرآیندی ایده آل را در نظر مجسم کرد که شکل مطلوب را از طریق تغییر شکل همگن ایجاد کند. مثلاً در روزنرانی با تقارن محوری یا کشش سیم (مفتول)، میله ای با قطر اولیه معین، به میله ای با قطر کمتر تبدیل می شود. فرآیند ایده آلی که با این تعبیر هندسی انطباق دارد، آزمون کشش است، کار لازم برای کاهش سطح مقطع میله ای از A_0 به A تحت بار گذاری کششی، با سطح زیر منحنی تنش حقیقی - کرنش حقیقی، در محدوده کرنشهای مورد نظر، برابر است. چون این فرآیندی ایده آل است، نتیجه می شود:

$$W_i = \int_0^{\epsilon} \bar{\sigma} d\bar{\epsilon} \quad (۶۴-۱)$$

که $\bar{\epsilon} = \ln \left[\frac{A_0}{A} \right]$. اگر فرض کنیم کار سختی از رابطه ای توانی پیروی می کند، داریم:

$$W_i = \frac{K \bar{\epsilon}^{n+1}}{n+1} \quad (۶۵-۱)$$

در بعضی موارد از تنش شارش میانگین Y_m ، در گستره کرنش همگن استفاده می شود، به طوری که

$$W_i = Y_m \bar{\epsilon} \quad (۶۶-۱)$$

و از مقایسه معادله های (۶۵-۱) و (۶۶-۱) نتیجه می شود:

$$Y_m = \frac{K \bar{\epsilon}^n}{n+1} = \frac{\bar{\sigma}}{n+1} \quad (۶۷-۱)$$

۱-۳-۱- اصطکاک، کار اضافی و بازده مکانیکی

کار واقعی لازم برای ایجاد تغییر شکل، علاوه بر کار مورد نیاز تغییر شکل همگن، شامل کار مربوط به آثار اصطکاک و تغییر شکل اضافی نیز هست. کار اصطکاکی در واحد حجم، W_f ، در فصل مشترک بین فلز تغییر شکل یافته و سطوح ابزاری که فلز را مقید می کنند، مصرف می شود. کار اضافی، W_r ، از واپسش داخلی، اضافه بر میزان مورد نیاز برای ایجاد شکل مطلوب ناشی می شود. نتیجه نهایی آن است که کار واقعی، حاصل جمع سه جمله است:

$$W_a = W_i + W_f + W_r \quad (۶۸-۱)$$

در عمل به دشواری می توان W_f را از W_r جدا کرد، زیرا از یکدیگر مستقل نیستند، اما با تعریف بازده تغییر شکل، η ، می توان این مشکل را دور زد:

$$\eta = \frac{W_i}{W_a} \quad (۶۹-۱)$$

با این تعریف جمله های کار غیر ایده آل با هم جمع می آیند. یقیناً η از عواملی مانند زاویه حدیده، میزان کاهش در هر عبور و روانکاری در فصل مشترک ابزار - قطعه تأثیر می پذیرد. غالباً در عمل η بین ۰/۵ و ۰/۶۵ تغییر می کند.

بنابراین کار واقعی چنین تعریف می شود:

$$W_a(P_e \text{ یا } \sigma_d) = \frac{1}{\eta} \int \bar{\sigma} d\bar{\epsilon} \quad (۷۰-۱)$$

که در آن P_e فشار روزنرانی و σ_d تنش کششی در کشش سیم می باشد. اگر اثر کار سختی کوچک باشد، همچون در گرمکاری، می توان در معادله (۷۰-۱) مقدار میانگین $\bar{\sigma}$ را قرار داد، به طوریکه:

$$\frac{1}{\eta} \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} \bar{\sigma} d\bar{\epsilon} = \frac{\sigma_a(\Delta\epsilon)}{\eta} = W_a(P_e \text{ یا } \sigma_d) \quad (۷۱-۱)$$

که در آن σ_d تنش شارش میانگین در گستره $\Delta\epsilon$ است.

۱-۳-۲- ماکزیمم کاهش سطح مقطع در عملیات کشش

در عملیات کششی اگر σ_d لازم برای اثر گذاری بر عملیات کششی، از تنش شارش فلز در سر خروجی حدیده بزرگتر باشد، پیش از وقوع شارش در حدیده، ماده دچار تسلیم کششی می شود و اگر σ_d از استحکام کششی بیشتر شود، تحت شرایط موجود از لحاظ میزان کاهش سطح مقطع و زاویه حدیده، کشش امکان پذیر نیست. ماکزیمم کرنش ممکن در نتیجه کشش، هنگامی حاصل می شود که $\sigma_d = \bar{\sigma}$. اگر در نخستین عبور، کرنش اضافی ناشی از تغییر شکل اضافی را نادیده بگیریم، از معادله

(۷۰-۱) نتیجه می شود که:

$$\sigma_d = \frac{1}{\eta} \int_0^{\varepsilon_{max}} \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon} \quad (72-1)$$

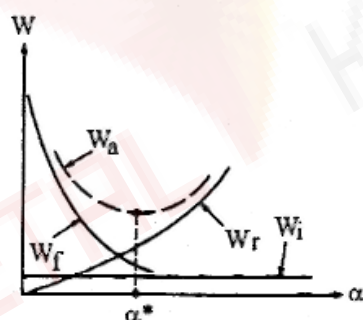
و برای کار سختی که از رابطه توانی پیروی می کند، داریم

$$\varepsilon_{max} = \eta(1+n) \Rightarrow r_{max} = 1 - e^{-\eta(1+n)} \quad (73-1)$$

در یک ماده مومسان ایده آل ($n=0$) و بازده کامل ($\eta=1$)، $\varepsilon_{max}=1$ و ماکزیمم کاهش سطح مقطع برابر است با $r_{max}=0.63$ یا 63% .

۱-۳-۳- اثر نیم زاویه حدیده بر کار همگن، کار اصطکاکی و کار اضافی

در عملیات کششی (سیم، ورق، لوله) و روزنرانی، به ازای ثابت بودن کاهش سطح مقطع با افزایش نیم زاویه حدیده α ، کار اصطکاکی (w_f) به دلیل کاهش سطح تماس، کاهش می یابد ولی کار اضافی (w_r) به دلیل افزایش میزان تغییر شکل افزایش می یابد. کار همگن (w_i) که تنها تابع کاهش سطح مقطع است، از تغییرات α تأثیر نمی پذیرد. با توجه به آثار معکوس α بر روی w_f و w_r ، با افزایش α ، میزان کار واقعی (w_a) تا یک مقدار مشخص α^* کاهش می یابد و مجدداً پس از آن افزایش می یابد. در نتیجه مقدار کار واقعی در بهترین زاویه قالب α^* ، دارای یک حداقل است. با زیاد شدن کاهش سطح مقطع و افزایش اصطکاکی، زاویه بهینه قالب، α^* ، افزایش می یابد. در شکل (۱۶-۱) آثار نیم زاویه حدیده، α ، برای کار واقعی، w_a ، به صورت کیفی نشان داده شده است.



شکل ۱-۱۶ اثر نیم زاویه حدیده روی کار واقعی، w_a ، در حین کشش. در این شکل کار ایده آل، w_i ، کار اصطکاکی، w_f ، و کار اضافی، w_r ، به طور جداگانه نشان داده شده اند

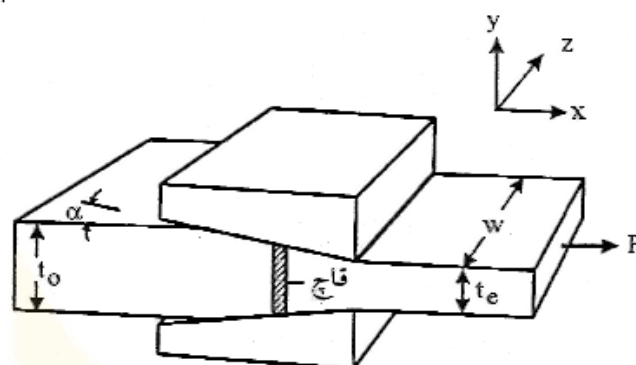
۱-۴-۲- فرایندهای شکل دادن فلزات

۱-۴-۱- کشش ورق

ورقی از فلز با پهنای اولیه w و ضخامت اولیه t را در نظر بگیرید که از میان یک جفت گوه کشیده

می شود. هر دو گوه شیبی یکسان به سوی خط مرکزی دارند و $w \gg t$. این فرآیند را معمولاً کشش ورق یا تسمه می نامند که جزییات آن در شکل (۱۷-۱) نشان داده شده است. به سبب شکل هندسی اولیه ورق، برای همه مقادیر عملی تغییر شکل با کرنش صفحه ای است ($\epsilon_z = 0$) و پهنای ورق تغییر نمی کند. در حقیقت تغییر ضخامت ورق و رسیدن به ضخامت t_e ، با افزایش معادل در طول قطعه همراه است. در حالت کرنش صفحه ای معیارهای فون میز و ترسکا معادل هستند.

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2K = \frac{2\sigma_o}{\sqrt{3}} = \sigma'_o$$



شکل ۱-۱۷) اصول کشش ورق یا تسمه با کرنش صفحه ای

بین تنش تسلیم کششی متوسط در حالت یک محوری (\bar{Y}) و تنش تسلیم متوسط در حین تغییر شکل صفحه ای \bar{S} طبق معیار فون میرز، رابطه زیر برقرار است:

$$\bar{S} = 1/15 \bar{Y} = 2K \quad (۷۴-۱)$$

و طبق معیار ترسکا $\bar{S} = \bar{Y} = 2K$. اما عمدتاً از معیار فون میرز استفاده می شود.

تنش لازم برای رساندن ضخامت ورق از t_o به t_e با در نظر گرفتن کار سختی از دو روش به دست می آید:

۱- تحلیل کار ایده آل

با فرض عدم وجود اصطکاک و بازده η داریم:

$$\sigma_d = \frac{\bar{S}}{\eta} \ln \left(\frac{1}{1-r} \right) = \frac{\bar{S}}{\eta} \ln \left(\frac{t_o}{t_e} \right) \quad (۷۵-۱)$$

که در آن σ_d تنش کششی لازم برای تغییر فرم تسمه است.

۲- تحلیل تعادل نیروها

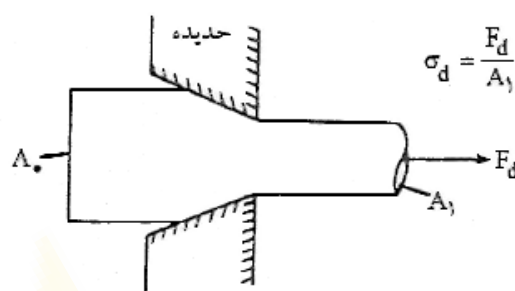
این روش علاوه بر این که شامل اطلاعات کار ایده آل می شود، آثار اصطکاک را نیز در بر دارد. طبق این روش داریم:

$$\sigma_d = \bar{S} \frac{(1+B)}{B} \left[1 - \left(\frac{t_e}{t_o} \right)^B \right] = \bar{S} \frac{(1+B)}{B} \left[1 - (1-r)^B \right] \quad (۷۶-۱)$$

که در آن $B = \mu \cot \alpha$ که μ ضریب اصطکاک و α نیم زاویه قالب است. r در معادله بالا کاهش سطح مقطع است.

۱-۴-۲- کشش سیم یا مفتول

طی فرآیند کشش سیم اگر سطح مقطع از A_0 به A_1 یا قطر سیم از D_0 به D_1 کاهش یابد. (شکل ۱-۱۸)، تنش لازم برای ایجاد کاهش در سطح مقطع طبق روابط زیر بدست می آید:



شکل ۱-۱۸) شمای فرآیند کشش سیم یا مفتول

۱- تحلیل کار ایده آل

در صورت عدم وجود اصطکاک با بازده η :

$$\sigma_d = \frac{\bar{Y}}{\eta} \ln \left[\frac{A_0}{A_1} \right] = \frac{2\bar{Y}}{\eta} \ln \left[\frac{D_0}{D_1} \right] = \frac{\bar{Y}}{\eta} \ln \left[\frac{1}{1-r} \right] \quad (۷۷-۱)$$

۲- طبق تحلیل ساکس:

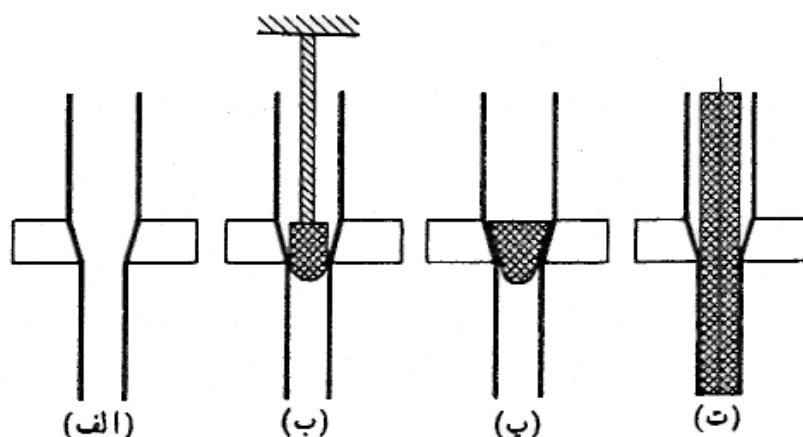
$$\sigma_d = \frac{\bar{Y}(1+\beta)}{\beta} \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_0} \right)^{2\beta} \right] = \frac{\bar{Y}(1+B)}{B} \left[1 - (1-r)^B \right] \quad (۷۸-۱)$$

که در آن $B = \mu \cot \alpha$ و μ ضریب اصطکاک و α نیم زاویه قالب است. \bar{Y} تنش شارش میانگین و r کاهش سطح مقطع است.

۱-۴-۳- فرآیندهای کشیدن لوله

استوانه‌های توخالی یا لوله‌هایی که با فرآیندهای شکل دادن گرم مانند فشارکاری یا سنبه کای و نورد تولید می‌شوند، غالباً توسط کشیدن پرداخت سرد می‌شود. کشیدن سرد برای بدست آوردن حدود مجاز ابعادی دقیقتر، تولید پرداختهای سطحی بهتر، بهبود خواص مکانیکی لوله به وسیله کار سختی، تولید لوله‌های با جدار نازکتر یا قطرهایی کوچکتر از آنچه با روشهای گرم کاری بدست می‌آید و تولید

لوله‌هایی با اشکال نامنتظم، به کار می‌رود. سه نوع فرآیند عمده کشیدن لوله عبارت است از ۱ - فروکشی ۲ - توپی کشی ۳ - سنبه کشی (شکل ۱-۱۹).



شکل ۱-۱۹ روشهای کشیدن لوله (الف) فروکشی (ب) توپی ثابت (پ) توپی شناور (ت) سنبه متحرک

۱-۴-۳-۱- توپی کشی

در توپی کشی هر دو قطر داخلی و خارجی لوله، با کشیدن آن روی توپی کنترل می‌شوند. توپی ممکن است استوانه‌ای یا مخروطی باشد. توپی، شکل و اندازه قطر داخلی را کنترل می‌کند و لوله‌ای با دقت ابعادی بیشتر از فروکشی لوله بدست می‌آید.

به علت زیاد شدن اصطکاک از جانب توپی، کاهش مساحت به ندرت از ۳۰ درصد تجاوز می‌کند. وضعیتی که یک توپی بدقت جفت شده در دهانه قالب شناور است در شکل (۱-۱۹) (پ) نشان داده شده است. توپیهای شناور به دقت طراحی شده می‌توانند ۴۵ درصد کاهش سطح ایجاد کنند. ویژگی مهم این طراحی این است که کشیدن و کلاف کردن طولهای بلند لوله امکان‌پذیر است. برای کشیدن لوله با توپی، تنش کششی مطابق زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_{xa} = \frac{\bar{S}(1+B')}{B'} \left[1 - \left(\frac{l_b}{l_a} \right)^{B'} \right] = \bar{S} \frac{(1+B')}{B'} \left[1 - (1-r)^{B'} \right] \quad (۷۹-۱)$$

که در آن \bar{S} تنش تسلیم متوسط در حین تغییر شکل صفحه‌ای، r کاهش سطح مقطع، l_a ضخامت جداره لوله ورودی و l_b ضخامت جداره لوله خروجی است. B' از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$B' = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\tan \alpha - \tan \beta}$$

که در آن μ_1 ضریب اصطکاک بین لوله و جداره قالب، μ_2 ضریب اصطکاک بین لوله و توپی، α نیم زاویه مخروط قالب و β نیم زاویه مخروط توپی است که برای توپ استوانه‌ای $\beta = 0$ می‌باشد.

۱-۴-۳-۲- سنبه کشی

سنبه از سیم یا مفتول سختی تشکیل شده است که در تمام طول لوله امتداد دارد و با لوله در قالب کشیده می‌شود. در کشیدن لوله با سنبه متحرک، قسمتی از نیروی کششی توسط کشیدن، بر قسمت خروجی و بخشی بوسیله نیروهای اصطکاکی وارد در امتداد سطح مشترک لوله با سنبه به فلز منتقل می‌شود. محدودیت این روش آن است که برای لوله‌های با طول بلند قابل استفاده نیست. ضمناً بعد از اتمام فرآیند، سنبه باید توسط قرقره از لوله خارج شود که این عمل قطر لوله را اندکی زیاد کرده و حدود مجاز ابعادی را به هم می‌زند. تنش کشیدن مطابق رابطه زیر است:

$$\sigma_{xa} = \frac{\bar{S}(1+B')}{B'} \left[1 - \left(\frac{t_b}{t_a} \right)^B \right] = \frac{\bar{S}(1+B')}{B'} \left[1 - (1-r)^B \right] \quad (۸۰-۱)$$

که در آن \bar{S} تنش تسلیم متوسط در حین تغییر شکل صفحه‌ای، r کاهش سطح مقطع، t_a ضخامت جداره لوله ورودی و t_b ضخامت جداره لوله خروجی است. B' از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$B' = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\tan \alpha - \tan \beta}$$

که در آن μ_1 ضریب اصطکاک بین لوله و جداره قالب، μ_2 ضریب اصطکاک بین لوله و توپی، α نیم زاویه مخروط قالب و β نیم زاویه مخروط توپی است که برای توپی استوانه‌ای $\beta = 0$ می‌باشد.

۱-۴-۳-۳- فروکشی

فروکشی لوله فرآیندی است که قطر داخلی لوله توسط آن کم می‌شود. قسمت‌هایی که در فروکشی لوله وجود دارد توسط ساکس و بالدوین و با این فرض که ضخامت جدار لوله ثابت می‌ماند، تحلیل شده‌اند. معادله تنش کشیدن در خروجی قالب مشابه معادله تنش کشیدن در کشیدن سیم و مطابق زیر است:

$$\sigma_{xa} = \frac{\bar{S}(1+B)}{B} \left[1 - \left(\frac{D_b}{D_a} \right)^B \right] \quad (۸۱-۱)$$

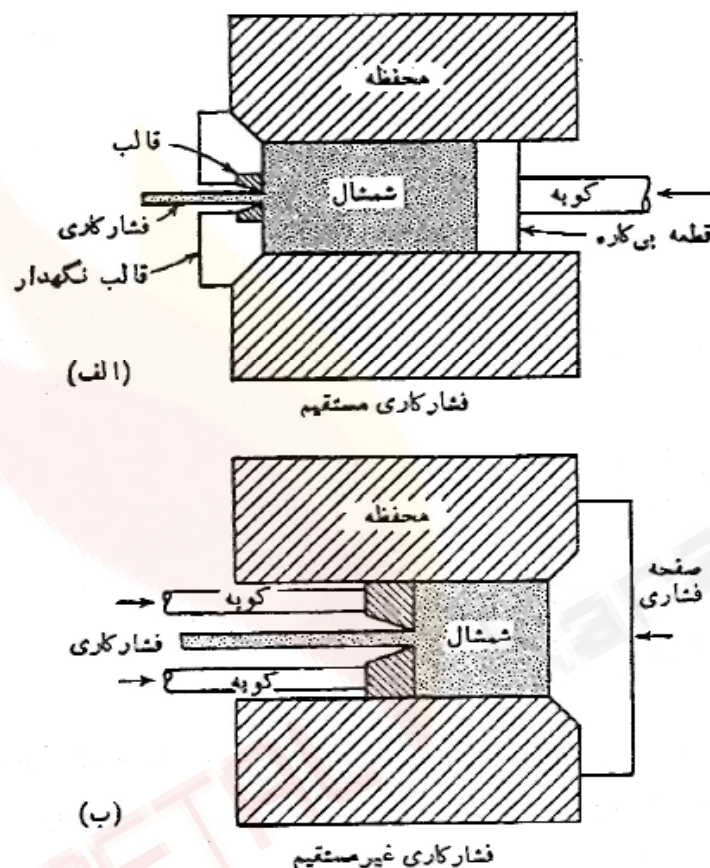
که در آن \bar{S} تنش تسلیم متوسط در حین تغییر شکل صفحه‌ای، D_a قطر داخلی لوله ورودی و D_b قطر

داخلی لوله خروجی است. $B = \mu \cot \alpha$ که در آن α نیم زاویه مخروط قالب است. در اینجا $\left(\frac{D_b}{D_a} \right)$ بر خلاف فرآیند کشش سیم که به توان B می‌رسید، به توان B می‌رسد که دلیل آن، این است که

مساحت سطح مقطع در فروکشی لوله تقریباً $\pi D l$ است.

۱-۴-۴- اکستروژن

اکستروژن یا روزنرانی یا فشار کاری، فرآیندی است که توسط آن، سطح مقطع قطعه فلزی در اثر وادار کردن قطعه به جریان از داخل دهانه قالب تحت فشار زیاد، کم می‌شود. به طور کلی اکستروژن برای تولید میله‌های استوانه‌ای یا لوله‌های توخالی به کار می‌رود. به علت نیاز به نیروهای زیاد در اکستروژن، بیشتر فلزات تحت شرایط گرم که مقاومت تغییر شکل فلز خیلی کم است، اکستروژن می‌شوند. دو نوع اصلی اکستروژن عبارتند از اکستروژن مستقیم و اکستروژن غیر مستقیم یا اکستروژن معکوس. (شکل (۱-۲۰))



شکل (۱-۲۰) انواع فرآیند اکستروژن یا فشار کاری

در اکستروژن مستقیم کوبه و محصول در یک جهت حرکت می‌کنند ولی در اکستروژن معکوس کوبه و محصول خلاف جهت هم حرکت می‌کنند.

نسبت فشار کاری عبارت است از نسبت سطح مقطع اولیه شمشال به سطح مقطع نهایی پس از فشار کاری.

$$R = \frac{A_0}{A_f} \quad (۱-۸۲)$$

رابطه بین نسبت اکستروژن و کاهش سطح مقطع دارای اهمیت است.

$$R = \frac{1}{1-r} \quad (۸۳-۱)$$

چنانچه قالب دارای نگهدارنده باشد، در اثر اصطکاک نگهدارنده در قالبی با زاویه ۹۰ درجه، ناحیه‌ای به نام منطقه مرده بوجود می‌آید.

برای یک زاویه نیم مخروطی ۴۵°، آهنگ متوسط کرنش در میانگین زمانی از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\varepsilon_i^* = \frac{\bar{\varepsilon}}{t} = \frac{\phi v \ln R}{D_b} \quad (۸۴-۱)$$

و برای زاویه نیم قالب α

$$\varepsilon_i^* = \frac{\phi V D_b^2 \ln R \tan \alpha}{D_b^2 - D_e^2} \quad (۸۵-۱)$$

که در آنها D_b قطر شمشال، D_e قطر قطعه اکستروژن شده، R نسبت اکستروژن و V سرعت کوبه است. فشار لازم برای اکستروژن با نسبت اکستروژن R برابر است با:

۱- تحلیل کار ایده‌آل

$$P_e = \frac{\bar{Y}}{\eta} \ln R = \frac{\bar{Y}}{\eta} \ln \left(\frac{1}{1-r} \right) \quad (۸۶-۱)$$

۲- تحلیل ساکس

$$P_e = \frac{\bar{Y}(1+B)}{B} \left[1 - \left(\frac{D_e}{D_b} \right)^{1/B} \right] = \frac{\bar{Y}(1+B)}{B} (1 - R^B) \quad (۸۷-۱)$$

که در آن $B = \mu \cot \alpha$ که μ ضریب اصطکاک و α نیم زاویه قالب و R نسبت اکستروژن است. اندازه‌گیری دقیق نیروها در اکستروژن که توسط دپیر انجام شد، نشان داد که نیروی کل اکستروژن P_e ، برابر مجموع نیروی قالب P_d ، نیروی اصطکاک بین آستر فلزی محفظه و شمشال برآمده P_{fb} و نیروی اصطکاک بین آستر فلزی و متعاقبات آن P_{ff} است به طور کلی $P_{ff} \approx 0$. تعریف معادله بر حسب فشار عبارت است از:

$$P_e = P_d + \frac{4\tau_i L}{D} \quad (۸۸-۱)$$

که در آن τ_i تنش برش یکنواخت در سطح مشترک شمشال و آستر فلزی محفظه، L طول شمشال در آستر فلزی محفظه و D قطر داخلی آستر فلزی محفظه است.

رابطه بین فشار اکستروژن و فشار در دهانه ورودی قالب:

$$\frac{P_e}{P_b} = 1 + \frac{\mu L}{D} \quad (۸۹-۱)$$

که در آن P_e فشار اکستروژن، P_b فشار در دهانه ورودی قالب، μ ضریب اصطکاک، L طول شمشال و D قطر داخلی محفظه اکستروژن است. رابطه دقیق‌تری به شکل زیر نیز ارائه شده است:

$$\frac{P_e}{P_b} = \exp \left(\frac{\mu L}{D} \right) \quad (۹۰-۱)$$

یک فرمول نیمه تجربی هم برای اکستروژن وجود دارد:

$$\frac{P_e}{Y} = a + b \ln R \quad (۹۱-۱)$$

که Y تنش تسلیم فلز است. برای قطعه اکستروژن شده دارای تقارن محوری $a = ۰/۸$ و $b = ۱/۵$ است. کودو برای اکستروژن در قالبهای قائم ($2\alpha = 180^\circ$) تعریف زیر را بیان کرد:

$$\frac{P_e}{Y} = ۱/۰۶ + ۱/۵۵ \ln R$$

درصد تأثیر اصطکاک را از فرمول زیر می‌توان محاسبه کرد:

$$\% \text{ تأثیر اصطکاک} = \frac{\left(\frac{P_e}{P_b} \right) - \left(\frac{P_e}{Y} \right)}{\left(\frac{P_e}{P_b} \right)} \times ۱۰۰ \quad (۹۲-۱)$$

که در آن $\left(\frac{P_e}{P_b} \right)$ از روابط (۸۹-۱) یا (۹۰-۱) و $\frac{P_e}{Y}$ از معادله (۸۶-۱) بدست می‌آیند. راندمان اکستروژن از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\eta = \frac{P_{id}}{P_e} \times ۱۰۰ \quad (۹۳-۱)$$

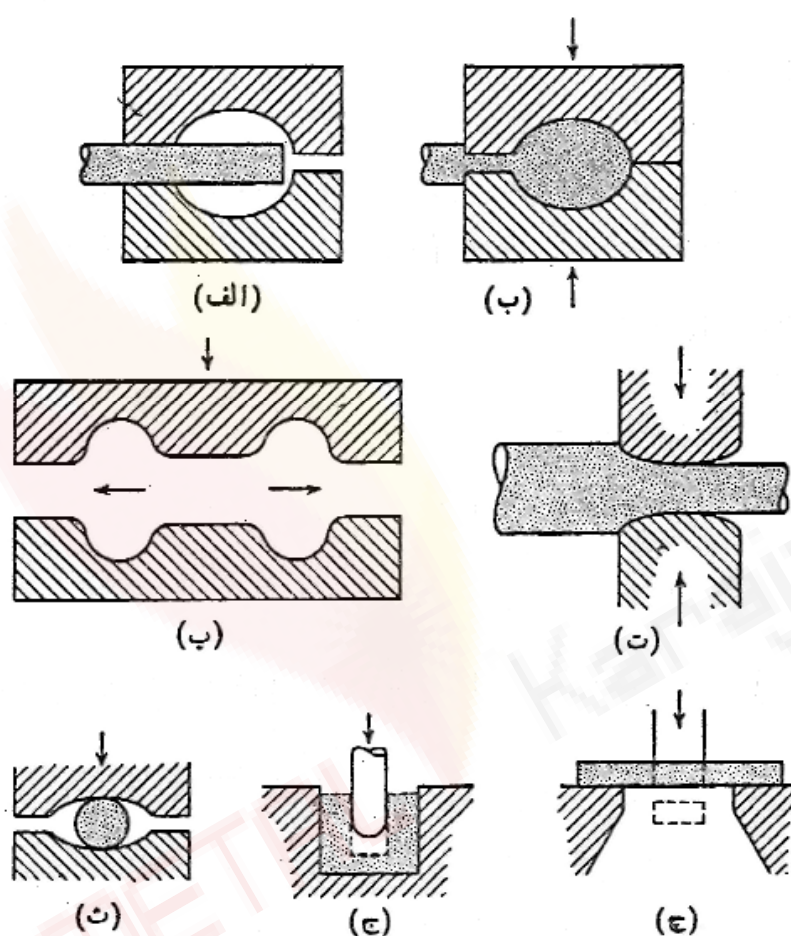
که P_{id} از معادله (۸۶-۱) به دست می‌آید و P_e هم فشار واقعی اکستروژن است.

۱-۴-۵- آهنگری (فورج)

۱-۴-۵-۱- دسته بندی فرآیندهای آهنگری (فورجینگ)

آهنگری کار بر فلز توسط پتک‌کاری یا پرسکاری و درآوردن آن به یک شکل مفید است. اغلب عملیات آهنگری به صورت گرم اجرا می‌شوند. اما فلزات ویژه‌ای هم هستند که می‌توانند به صورت سرد آهنگری شوند. در عملیات آهنگری دو دسته اصلی تجهیزات به کار می‌روند پتک آهنگری یا پتک

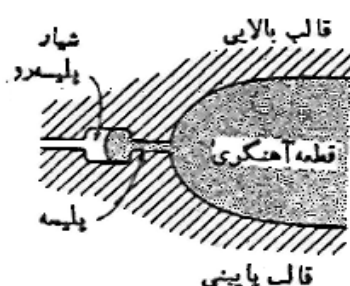
سقوطی که ضربه سریعی را به سطح فلز وارد می‌کند و پرس آهنگری که نیروی فشاری آرامی را به فلز وارد می‌کند. دو دسته اصلی فرآیندهای آهنگری، آهنگری قالب باز و آهنگری قالب بسته هستند. آهنگری قالب باز بین قالبهای مسطح یا قالبهای با اشکال بسیار ساده اجرا می‌شود. این فرآیند اکثراً برای اشیاء بزرگ یا وقتی که تعداد قطعات تولید شده کم است به کار می‌رود. در آهنگری قالب بسته قطعه بین دو نیم قالب که اثر شکل نهایی قطعه بر آنها نقش بسته تغییر شکل پیدا می‌کند. در این روش قطعه تحت فشار زیاد و در یک حفره بسته تغییر شکل می‌دهد و بنابراین قطعات آهنگری شده دقیقی با حدود مجاز ابعادی ظریف قابل تولید هستند. در شکل (۱-۲۱) انواع فرآیندهای آهنگری نشان داده شده‌اند.



شکل ۱- ۲۱) انواع عملیات آهنگری: (الف) و (ب) لبه کاری (پ) شیارکاری (ت) کشش (ث) سوراخکاری (ج) سنبه کاری (ح) سوراخکاری

استفاده از فلز به اندازه کافی در قطعه آهنگری، طوری که حفره قالب را کاملاً پر کند، مهم است. چون قرار دادن مقدار درست فلز در مکانهای صحیح حین شیارکاری و لبه کاری مشکل است، استفاده از کمی فلز اضافه مرسوم است. وقتی قالبها برای مرحله نهایی به هم نزدیک می‌شوند، فلز اضافی به صورت نوار نازکی از فلز که به پلیسه مرسوم است بیرون می‌زند. برای جلوگیری از تشکیل پلیسه خیلی

پهن، معمولاً یک برآمدگی موسوم به شیار پلیسه رو تعبیه می‌کنند. (شکل (۱-۲۲))



شکل ۱-۲۲ شمای مقطع در آهنگری قالب بسته

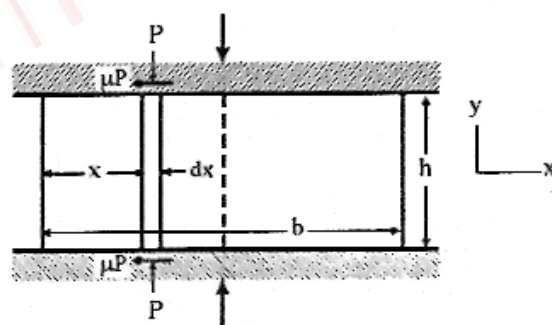
مرحله نهایی در ساخت یک قطعه آهنگری قالب بسته، زدودن پلیسه قالب پلیسه‌گیری است. شکل (۱-۲۳) منحنی مشخصه بار آهنگری را بر حسب پیش روی قالب (ضربه پرس) برای فرآیندهای آهنگری قالب بسته نشان می‌دهد.



شکل ۱-۲۳ منحنی مشخصه بار آهنگری بر حسب ضربه برای آهنگری قالب بسته

۱-۴-۵-۲- آهنگری در شرایط کرنش صفحه‌ای

در شکل (۱-۲۴) آهنگری قطعه‌ای با ضخامت یکنواخت و در شرایط کرنش صفحه‌ای نشان داده شده است. فرض می‌شود که ورق دارای عرض w ، عمود بر صفحه کاغذ باشد و این عرض ثابت بماند.



شکل ۱-۲۴ اصول تحلیل تراز نیروی قاج

آهنگری این قطعه را در شرایط اصطکاک لغزنده و چسبنده بررسی می‌کنیم.

۱- اصطکاک لغزنده:

فشار لازم برای فورجینگ در این حالت از معادله زیر بدست می‌آید:

$$P = 2K \exp \left(\frac{2\mu x}{h} \right) \quad (94-1)$$

که از سطح $x = 0$ تا خط مرکزی $x = \frac{b}{2}$ صادق است. مقدار ماکزیمم P در خط مرکزی دیده می‌شود:

$$P_{max} = 2K \exp \left(\frac{\mu b}{h} \right) \quad (95-1)$$

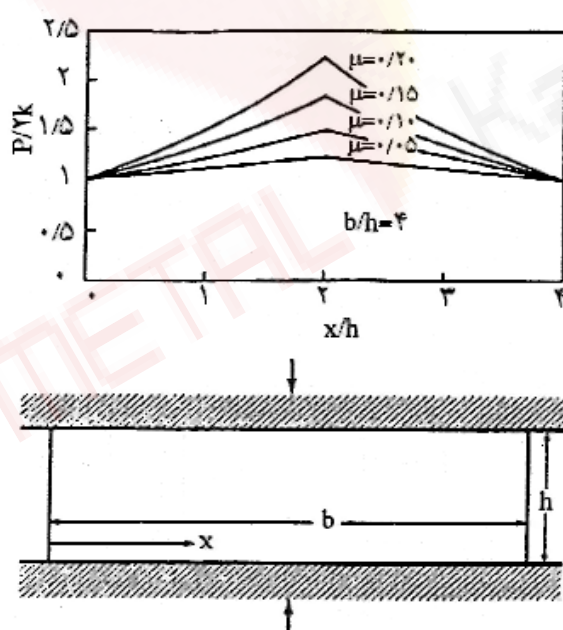
و حداقل P در لبه‌های ورق در $x=0$ می‌باشد:

$$P_{min} = 2K$$

باید توجه داشت که روابط بالا به ازای بعضی مقادیر μ معتبر هستند. زیرا تنش برشی در فصل مشترک که در روابط بالا μP فرض شده‌اند، نمی‌تواند از استحکام برشی ساده، K ، بیشتر شود، یعنی رابطه زیر برقرار باشد:

$$\frac{b}{h} \leq \frac{1}{\mu} \ln 2\mu$$

صعود P در هنگام نزدیک شدن به خط مرکزی را که در شکل (۲۵-۱) نشان داده شده است، تپه اصطکاک می‌نامیم.



شکل ۲۵-۱ نمایش تپه اصطکاک در فشردن با کرنش صفحه‌ای به ازای مقادیر مختلف ضریب اصطکاک

فشار میانگین برای انجام عملیات آهنگری از رابطه زیر بدست می آید:

$$P_{av} = \frac{\gamma K h}{\mu b} \left[\exp \left(\frac{\mu b}{h} \right) - 1 \right] \quad (96-1)$$

به ازای مقادیر کوچک $\frac{\mu b}{h}$ نتیجه می شود:

$$\frac{P_{av}}{\gamma K} = 1 + \frac{\mu b}{\gamma h} + \dots \approx 1 + \frac{1}{\gamma} \frac{\mu b}{h} \quad (97-1)$$

نیروی لازم برای فورج از رابطه زیر بدست می آید:

$$F_b = b \cdot W \cdot P_{av}$$

۲- اصطکاک چسبنده در فصل مشترک

اگر در فصل مشترک اصطکاک چسبنده حاکم باشد، در این صورت فشار لازم برای فورج از رابطه زیر بدست می آید:

$$P = \gamma K \left(1 + \frac{x}{h} \right) \quad (98-1)$$

ماکزیمم فشار در خط مرکزی از رابطه زیر بدست می آید:

$$P_{max} = \gamma K \left(1 + \frac{b}{\gamma h} \right) \quad (99-1)$$

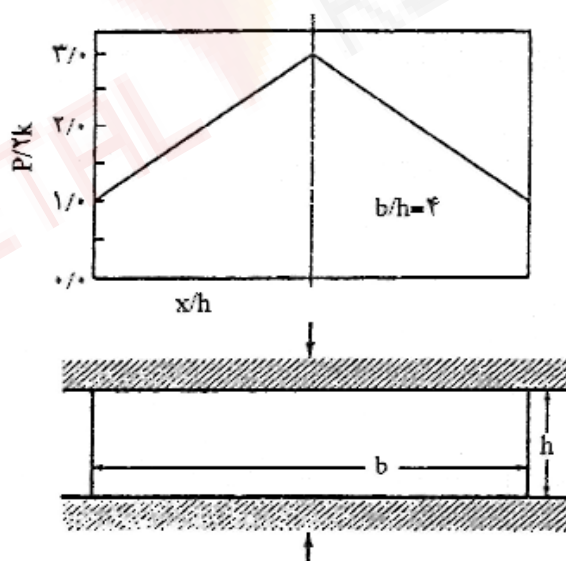
حداقل فشار فورج در لبه ها خواهد بود.

$$P_{min} = \gamma K \quad (100-1)$$

فشار میانگین در این حالت برابر خواهد بود با:

$$P_{av} = \gamma K \left(1 + \frac{b}{\gamma h} \right) \quad (101-1)$$

توزیع فشار در این حالت در شکل (۲۶-۱) نشان داده شده است:



شکل ۱- ۲۶) تپه اصطکاک در فشردن با کرنش صفحه ای و در شرایط اصطکاک چسبنده

نیروی لازم برابر است با:

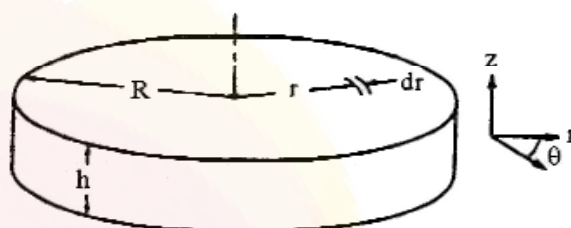
$$F_P = b \cdot W \cdot P_{av} \quad (102-1)$$

۱- ۴- ۵- ۳- تنش برشی ثابت در فصل مشترک

هنگامی که از فیلمی از جامدهای نرم (مثل پلاستیک و یا سرب) برای روانکاری بین ابزارها و قطعه کار استفاده شود، با ثابت فرض کردن تنش برشی، $\tau = mK$ ، در فصل مشترک، شرایط اصطکاکی را بهتر می‌توان تقریب زد. در این حالت $0 \leq m \leq 1$. بنابراین فشارهای موضعی، ماکزیمم و میانگین به ترتیب از معادله (۹۸-۱)، (۹۹-۱) و (۱۰۱-۱) بدست می‌آیند، به شرط آنکه آخرین جمله هریک از این معادله‌ها را در m ضرب کنیم.

۱- ۴- ۵- ۴- آهنگری در شرایط تقارن محوری

یک قرص فلزی به شعاع R و ضخامت h را که تحت عملیات آهنگری قرار گرفته در نظر بگیرید. (شکل (۲۷-۱)).



شکل ۱- ۲۷ آهنگری در شرایط تقارن محوری

در دو حالت اصطکاک لغزنده و اصطکاک چسبنده فشار لازم برای فورج را محاسبه می‌کنیم:

۱- اصطکاک لغزنده

هرگاه مقدار μ یا ضریب اصطکاک لغزشی در فصل مشترک ثابت باشد، فشار لازم برای فورج از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$P = Y \exp \left[\frac{\gamma \mu}{h} (R - r) \right] \quad (103-1)$$

فشار میانگین برابر است با:

$$P_{av} = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{h}{\mu R} \right]^{\gamma} Y \left[\exp \left[\frac{\gamma \mu R}{h} \right] - \frac{\gamma \mu R}{h} - 1 \right] \quad (104-1)$$

به ازای مقادیر کوچک μ و مقادیر متوسط $\frac{R}{h}$ ، تقریب اول خوبی از معادله بالا چنین است:

$$P_{av} = Y \left[1 + \frac{a}{3} + \frac{a^2}{12} + \dots \right] \quad (10.5-1)$$

که در آن $a = \frac{2\mu R}{h}$ و تنها از سه جمله اول بسط e^a استفاده شده است.

باید توجه داشت که اصطکاک لغزنده فقط در صورتی در سراسر فصل مشترک حاکم است که:

$$R \leq \left(\frac{h}{2\mu} \right) \ln \left(\frac{K}{\mu Y} \right)$$

نیروی لازم برای آهنگری در این حالت برابر است با:

$$F_p = \pi R^2 \cdot P_{av} \quad (10.6-1)$$

۲- اصطکاک چسبنده

اگر در فصل مشترک اصطکاک چسبنده وجود داشته باشد، باید تنش برشی، K ثابت باشد.

فشار آهنگری در این حالت از رابطه زیر بدست می آید:

$$P = Y + \frac{2K}{h}(R - r) \quad (10.7-1)$$

فشار میانگین به ازای تنش برشی ثابت چنین بدست می آید:

$$P_{av} = Y + \frac{2KR}{3h} \quad (10.8-1)$$

نیروی لازم برای آهنگری در این حالت از رابطه زیر بدست می آید:

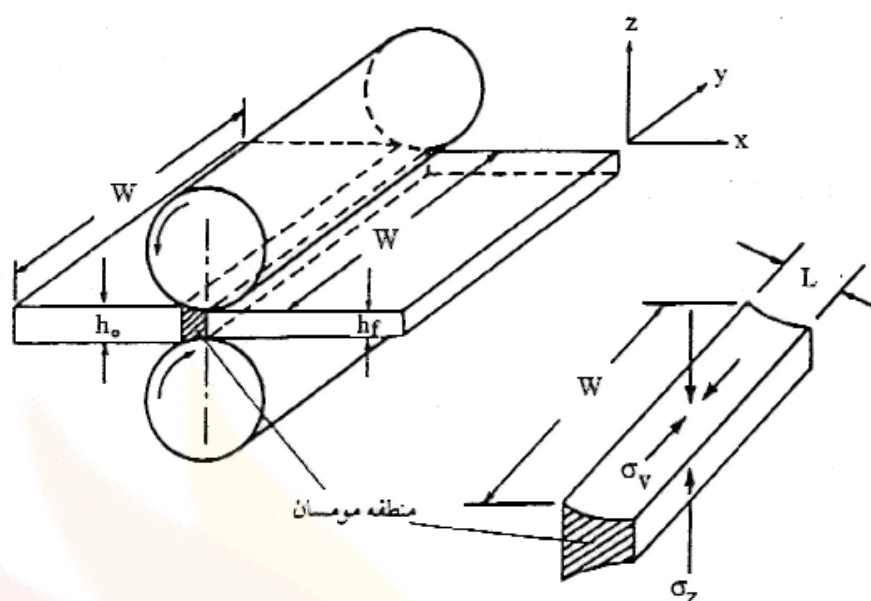
$$F_p = \pi R^2 \cdot P_{av} \quad (10.9-1)$$

برای بدست آوردن فشار لازم برای شروع سیلان در تمام روابط h و b و R اولیه را قرار می دهیم و برای محاسبه فشار نهایی h و b و R نهایی را قرار می دهیم. همچنین برای محاسبه نیروی آهنگری همیشه از فشار میانگین استفاده می کنیم.

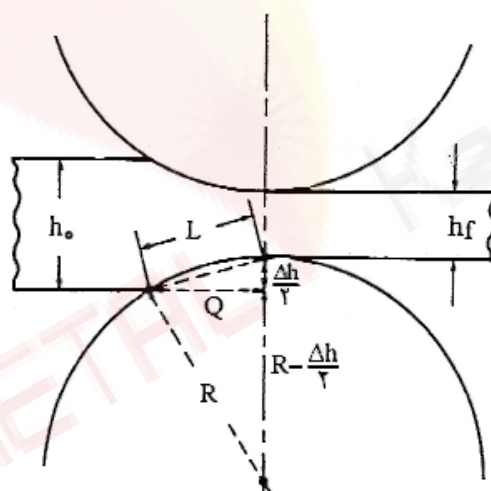
۱-۴-۶-نورد

نورد کاری تخت صفحه ها، ورقها و تسمه ها اساساً عملیاتی با کرنش صفحه ای است زیرا در نتیجه این کار، پهنای قطعه کار فقط اندکی افزایش می یابد. با بررسی شکل منطقه تغییر شکل، مطابق شکل (۲۸-۱) می توان این موضوع را توضیح داد. طول ناحیه تماس بین غلتک ها و قطعه کار، L معمولاً از پهنای ورق، W ، بسیار کوچکتر است. هنگامی که غلتکها تنش فشاری σ_z را ایجاد می کنند، منطقه مومسان نازک می شود و می تواند آزادانه در امتداد نورد کاری، یعنی امتداد x منبسط شود. اما ماده تغییر

شکل نیافته در دو طرف شکاف غلتک، به طور مؤثری مانع انبساط جانبی در امتداد y می‌شود. در نتیجه حالتی از کرنش صفحه‌ای پدید می‌آید که در آن $\epsilon_y \approx 0$ و $\epsilon_x \approx -\epsilon_z$ ، به جز در لبه‌های قطعه کار. شکل هندسی شکاف غلتک در شکل (۲۹-۱) را در نظر بگیرید که در آن شعاع غلتک، $\Delta h = h_0 - h_f$ کاهش ضخامت، و L وتر کمان تماس است. مشاهده می‌شود که:



شکل ۱- ۲۸ تصویر شماتیک منطقه تغییر شکل در نوردکاری تخت



شکل ۱- ۲۹ روابط ابعادی در شکاف غلتک

$$L = \sqrt{R \Delta h}$$

(۱۱۰-۱)

زاویه گیرش یا زاویه گازگیری زاویه‌ای است که یک ضلع آن محور شروع نورد و ضلع دیگر آن محور غلطکها است. رابطه زیر بین زاویه گیرش (α) ، کاهش ضخامت (Δh) و قطر غلطکها (d) وجود

دارد:

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\Delta h}{d} \quad (111-1)$$

شرط گازگیری این است که $\mu > \tan \alpha$ باشد که در آن μ ضریب اصطکاک و α زاویه گازگیری است و حداکثر زاویه گازگیری:

$$\alpha_{max} = \tan^{-1} \mu \quad (112-1)$$

رابطه بین حداکثر کاهش ضخامت، ضریب اصطکاک و شعاع غلتک:

$$\Delta h_{max} = \mu^2 R \quad (113-1)$$

در حالت کلی زاویه گیرش برابر است با:

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{L}{R - \frac{\Delta h}{2}} \right)$$

کار انجام شده در فرآیند نورد از رابطه زیر بدست می آید:

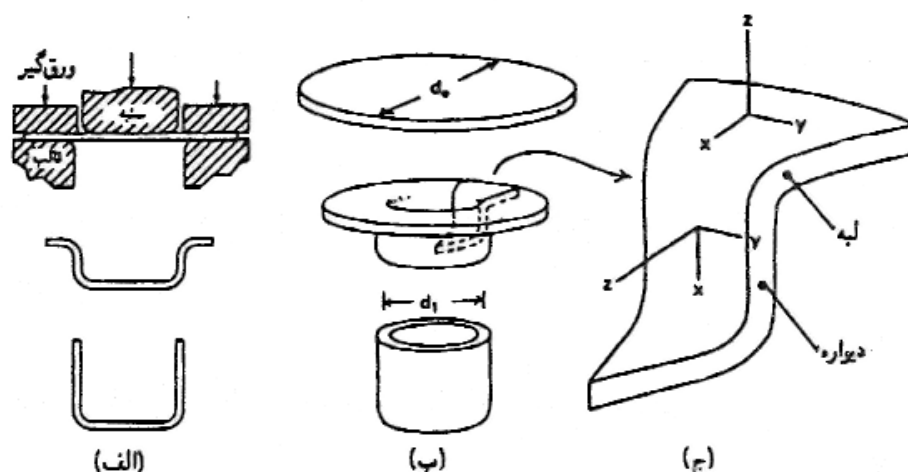
$$W = \frac{F}{W} = \bar{s} \sqrt{R \cdot \Delta h} \quad (114-1)$$

که در آن F نیروی نورد، W عرض ورق، \bar{s} تنش تسلیم متوسط حین تغییر شکل صفحه ای، R شعاع غلتک و Δh کاهش ضخامت است. وقتی ۲۰٪ تأثیر اصطکاک و کار اضافی را هم در نظر بگیریم فرمول بالا به شکل زیر در می آید:

$$\frac{F}{W} = 1/2 \bar{s} \sqrt{R \cdot \Delta h} \quad (115-1)$$

۱-۴-۷- کشش عمیق

کشش عمیق نوعی فرآیند فلزکاری است که برای شکل دادن ورق صاف به محصولات فنجانیه شکل مثل وان حمام، محفظه های پوسته ای و گلگیر اتومبیل مورد استفاده قرار می گیرد. این عمل با قراردادن لقمه ای به اندازه مناسب روی قالب شکل دار و فشار دادن فلز به داخل قالب با یک سنبه انجام می شود. (شکل ۱-۳۰)



شکل ۱-۳۰ تصویر شماتیک کشش عمیق و محورهای مختصات

برای هر ماده، معین یک نسبت کشش حدی (LDR) وجود دارد که معرف بزرگترین لقمه‌ای است که می‌تواند از داخل قالب کشیده شود بدون اینکه پاره شود. حد بالایی نظری در LDR برابر است با:

$$LDR = \frac{D_0}{D_p} \approx e^{\eta} \quad (116-1)$$

که D_0 قطر ورق گرد اولیه و D_p قطر سنبه یا قطر محصول فنجانی شکل است. η راندمان است و افت‌های اصطکاکی را نشان می‌دهد. اگر $\eta = 1$ باشد، $LDR \approx 2.7$ خواهد بود در صورتی که $\eta = 0.7$ باشد، $LDR \approx 2$ است.

η یا بازده در فرآیند کشش عمیق نسبت فشار ایده‌آل به فشار واقعی برای انجام عملیات کشش عمیق است.

$$\eta = \frac{P_{id}}{P_w}$$

حداکثر نیروی لازم برای کشش عمیق با بازده η از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$F_{max} = \frac{\pi d_1 t S}{\eta} \ln \left(\frac{d_0}{d_1} \right) \quad (117-1)$$

که در آن d_0 قطر قطعه اولیه، d_1 سنبه، t ضخامت ورق و S تنش شارش فلز در شرایط کرنش صفحه‌ای است. در این حالت تنش محوری در دیواره‌ها برابر است با:

$$\sigma_x = \frac{F_{max}}{\pi d_1 t} = \bar{s} \ln \left(\frac{d_0}{d_1} \right) \quad (118-1)$$

در فرآیند کشش عمیق در قسمت لبه رابطه زیر برای کرنش موثر وجود دارد:

$$\bar{\epsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln(LDR)$$

چنانچه کرنش میانگین را با \bar{R} نشان دهیم، داریم:

$$\ln(LDR) = \eta \sqrt{\frac{\bar{R} + 1}{2}}$$

۱-۵- تحلیل کران بالایی

در عملیات شکل دادن فلزات، نیرویی را باید محاسبه کرد که قطعاً بتواند فلز را تغییر شکل مومسان دهد و شکل مطلوب را به آن ببخشد. تحلیل کران بالایی، باری را تخمین می‌زند که برابر با، یا بزرگتر از بار مورد نیاز برای ایجاد شارش مومسان است. در تحلیل‌های کران بالایی بر ارضای یک معیار تسلیم و اطمینان یافتن از اینکه تغییر در شکل از لحاظ هندسی خودسازگار است، تأکید می‌شود. در این روش به تعادل تنش توجه نمی‌شود.

۱-۵-۱- تحلیل کران بالایی (راه حل قابل قبول از لحاظ سینماتیکی)

قضیه کران بالایی را می‌توان چنین بیان کرد: هر تخمینی از بار فروپاشی یک سازه که با برابر گرفتن آهنگ داخلی مصرف انرژی، با آهنگ انجام کار نیروهای خارجی در الگوی تغییر شکل فرضی، بدست می‌آید، از بار واقعی بیشتر، یا با آن برابر است. اساس یک تحلیل بالایی به شرح زیر است:

۱- یک میدان شارش داخلی فرض می‌شود و در تغییر شکل مورد نیاز به حساب می‌آید. این میدان باید از لحاظ هندسی خودسازگار باشد.

۲- انرژی مصرف شده داخلی در این میدان تغییر شکل، با استفاده از خواص مکانیکی فلزی که کار روی آن انجام می‌گیرد، محاسبه می‌شود.

۳- نیروها (یا تنشها)ی خارجی، با برابر گرفتن کار خارجی با مصرف انرژی داخلی محاسبه می‌شود. در چنین روشهایی، می‌توان با رسم نمودار بردار سرعت، سازگاری کامل میدان فرضی را واریسی کرد. این نمودار را معمولاً سرعت نگار می‌نامند. در هنگام استفاده از روش کران بالایی در عملیات فلزکاری، چندین فرض ساده کننده را در نظر می‌گیرند.

۱- ماده همسانگرد و همگن است.

۲- از آثار کرنش - سختی و آهنگ کرنش بر تنش شارش چشم‌پوشی می‌شود.

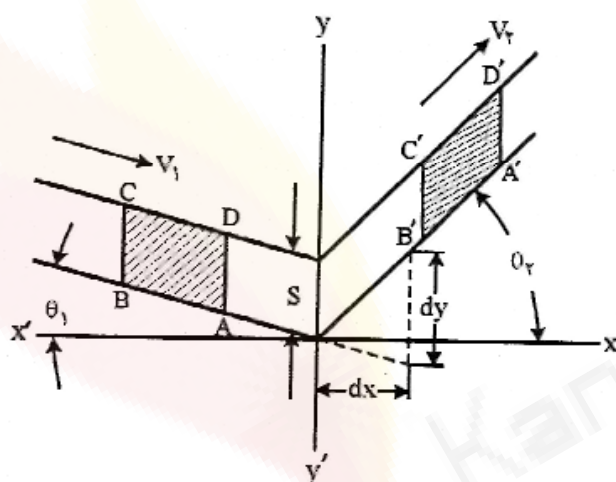
۳- در فصل مشترک ابزار - قطعه کار شرایط بدون اصطکاک یا تنش برشی ثابت برقرار است.

۴- در اغلب مواردی که بررسی می‌شود، شارش دو بعدی (کرنش صفحه‌ای) است و همه تغییر شکل به وسیله برش در چند صفحه گسته انجام می‌شود. در موارد دیگر ماده صلب فرض می‌شود. اگر فرض شود که برش در صفحه‌های متقاطع و غیر متعامد انجام می‌شود، این صفحه‌ها نمی‌توانند

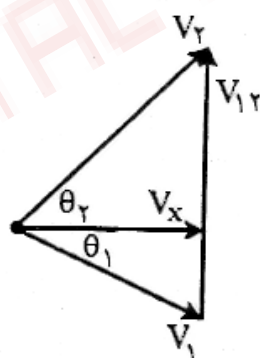
صفحه‌های تنش برشی ماکزیمم باشند. بسیاری از این قبیل میدانها را می‌توان مطرح کرد و هرچه میدان به میدان شارش حقیقی شبیه‌تر باشد، جوابهای حاصل از روش کران بالایی نیز دقیقتر خواهند بود.

۱-۵-۲- مصرف انرژی روی صفحه‌ای با برش گسسته

در شکل (۱-۳۱-الف) جزء $ABCD$ از فلزی صلب نشان داده شده است که با سرعت واحد V_1 حرکت می‌کند و پهنای آن نیز برابر واحد است. AD با yy' موازی است. هنگامی که این جزء به صفحه yy' می‌رسد، به تغییر امتداد، شکل و سرعت وادار می‌شود. در سمت راست yy' شکل آن $A'B'C'D'$ ، و سرعت آن V_2 است که با امتداد افقی زاویه θ_2 می‌سازد. شکل (۱-۳۱-ب) سرعت نگار را نشان می‌دهد. سرعتهای مطلق در دو طرف yy' عبارتند از V_1 و V_2 ، که از مبدأ O رسم می‌شوند. هم V_1 و هم V_2 باید مؤلفه افقی V_x داشته باشند، در غیر این صورت حجم ماده‌ای که به yy' می‌رسد با حجم ماده‌ای که آن را ترک می‌کند برابر نخواهد بود، یعنی ماده تراکم‌ناپذیر نیست.



(الف)



(ب)

شکل ۱-۳۱ (الف) مبنای تحلیل مصرف انرژی در صفحه‌ای با برش ناپیوسته (ب) سرعت نگار یا نمودار بردار

سرعت

سرعت V_{12}^* عبارت است از اختلاف برداری بین V_1 و V_2 و ناپیوستگی سرعت در طول yy' را نشان می‌دهد. فرض می‌شود V_{12}^* در امتداد خط (یا صفحه) yy' است.

آهنگ مصرف انرژی روی yy' باید با کار در واحد حجم، ضرب در حجمی که در واحد زمان از yy' می‌گذرد برابر باشد. چون تغییر شکل از برش ناشی می‌شود، کار در واحد حجم، یعنی w با تنش برشی τ ، ضرب در کرنش برشی γ ، برابر است. در اینجا τ باید استحکام برشی فلز، K ، باشد و

$$\gamma = \frac{dy}{dx} \text{، بنابراین:}$$

$$w = k \frac{dy}{dx} \quad (119-1)$$

حجمی که در جزء زمان dt از yy' می‌گذرد برابر است با طول خط، S ، در امتداد yy' ضرب در عمق صفحه عمود بر yy' (واحد)، ضرب در V_x . بنابراین:

$$\frac{\text{حجم}}{\text{زمان}} = S(1) V_x \quad (120-1)$$

از تلفیق معادله‌های (119-1) و (120-1) آهنگ انجام کار برای ایجاد این تغییر شکل برشی بدست می‌آید:

$$\frac{dW}{dt} = \left[K \frac{dy}{dx} \right] (S V_x) \quad (121-1)$$

از مقایسه شکل‌های (۱-۳۱-الف) و (۱-۳۱-ب) نتیجه می‌شود.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V_{12}^*}{V_x}$$

پس:

$$\frac{dW}{dt} = K S V_{12}^* \quad (122-1)$$

برای میدانهای تغییر شکلی که بیش از یک صفحه برش گسسته داشته باشند، داریم:

$$\frac{dW}{dt} = \sum_i K \cdot S_i \cdot V_i^* \quad (123-1)$$

که S_i و V_i^* به صفحه‌های مجزا مربوطند.

معادله (123-1) همان صورتی است که در اغلب مسائل شامل محاسبات کران بالایی استفاده خواهد شد. این معادله نشان می‌دهد که هر جزء به روشی تغییر شکل می‌دهد که مقاومت مومسان ماکزیمم را از خود نشان دهد.

۱-۶- نظریه میدان خط لغزش

در هنگام بحث درباره رهیافت کران بالایی در مورد مسأله‌های کرنش صفحه‌ای، فرض می‌شود که تغییر شکل در طول خطوط برش شدید رخ می‌دهد. با وقوع تغییر شکل، فلز داخل هر چند ضلعی به صورت قطعه‌ای یکپارچه حرکت می‌کند. برای ایجاد تصویری واقعی‌تر از شارش فلز در حین تغییر شکل، نوعی نظریه میدان وجود دارد. این روش را می‌توان روش ترسیمی تلقی کرد که آن را تحلیل میدان خط لغزش می‌نامند.

این نامگذاری تا حدودی در نظر مهندس متالورژی خوشایند نیست، زیرا خط لغزش معنای خاص خود را دارد. شاید «نظریه صفحه برش» نام بهتری بود، زیرا خطوط لغزش به صفحه‌هایی با تنش برشی ماکزیمم مربوطند که با صفحه‌های اصلی زاویه 45° می‌سازند.

این تحلیل بر میدان تغییر شکلی مبتنی است که از لحاظ هندسی با ایجاد تغییر در شکل سازگار است، به علاوه تنشهای درون میدان از لحاظ استاتیکی قابل قبولند. اما چون حالت تنش در بیرون از میدان نادیده گرفته می‌شود، بعضی از میدانهای پیشنهادی، که در غیر این صورت قابل قبول می‌بودند، ممکن است تعادل در بیرون منطقه تغییر شکل را بر هم بزنند. در این حالت، چنین جوابهایی کرانه‌ای بالا هستند. علاوه بر فرضهای معمول، دال بر همسانگرد و همگن بودن فلز، رهیافت متداول به این موضوع شامل فرضهای زیر نیز هست:

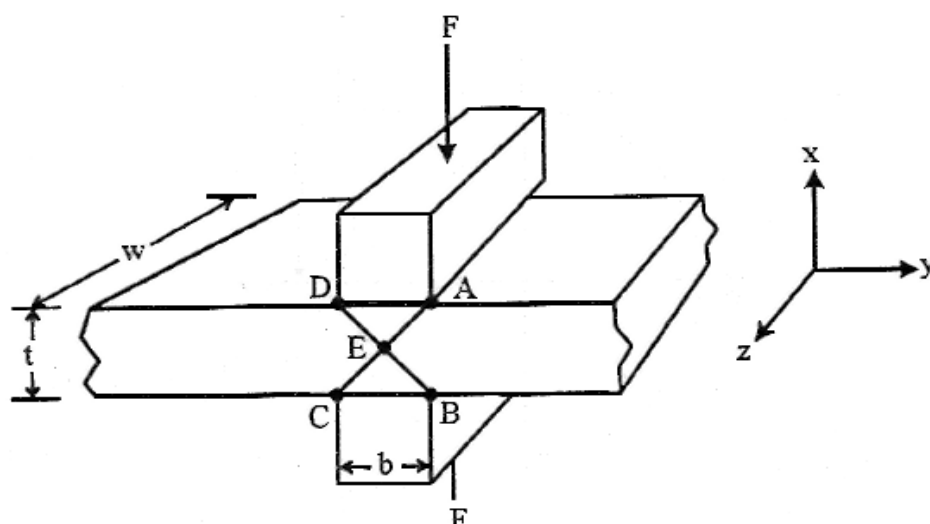
۱- فلز کاملاً صلب - مومسان است. این به معنای نادیده گرفتن کرنشهای کشسان و ثابت فرض کردن تنش شارش است (کار - سختی رخ نمی‌دهد).

۲- تغییر شکل با کرنش صفحه‌ای است.

۳- آثار احتمالی دما آهنگ کرنش و زمان در نظر گرفته نمی‌شود.

۴- تنش برشی در فصل مشترک ثابت است. معمولاً شرایط بدون اصطکاک، یا اصطکاک چسبنده فرض می‌شود.

عمل شکل دادن در شکل (۱-۳۲) را در نظر بگیرید. دو سندان تخت چنان بارگذاری شده‌اند که ورق یا صفحه‌ای به پهنای w و ضخامت t را فشار دهند. طول سندانها دست کم برابر w و پهنای آنها $b=t$ است. اگر $t \gg w$ باشد، آنگاه با اعمال بار F ، عملاً هیچ تغییری در بعد w ، در زیر سندانها ایجاد نمی‌شود، بنابراین منطقه تغییر شکل وضعیت کرنش صفحه‌ای را تقریب می‌زند.

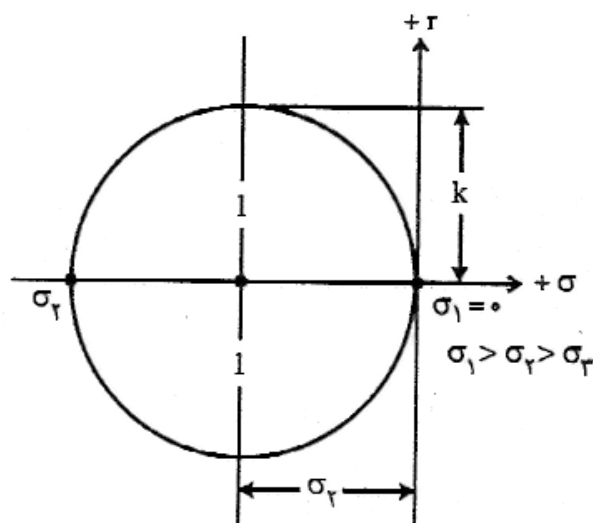


شکل (۳۲-۱) میدان خط لغزش برای فروبردن بدون اصطکاک، که در آن $t = b$

فرض کنید که فصل مشترک سندان - قطعه کار بدون اصطکاک است، در نتیجه تنش برشی ماکزیمم در طول خطوط AEC و DEB ایجاد می شود، زیرا تنش اصلی است. نواحی CEB و DEA به صورت دو بلوک صلب عمل می کنند، در حالی که نواحی واقع در سمت راست AEB و سمت چپ DEC نیز صلب اند و به صورت نشان داده شده با پیکانها حرکت می کنند. بدیهی است که با افزایش بار، و با کاهش فاصله بین سندانها، یعنی کاهش ضخامت t الگوی نشان داده شده در شکل (۳۲-۱) باید تغییر کند. اما فرض کنید که می خواهیم اندازه بار F را چنان محاسبه کنیم که سبب آغاز تغییر شکل مومسان شود. آنگاه میدان شارش ساده $DAEBC$ را می توان به صورت میدان خط لغزشی در نظر گرفت که این پیشگویی را ممکن می کند. تنش افقی σ_y باید صفر باشد، زیرا هیچ نیروی بازدارنده ای در امتداد y عمل نمی کند، در حالی که تنش عمودی یا تنش بارگذاری σ_x ، باید تنش اصلی باشد، زیرا سطوح DA و CB بدون اصطکاک هستند. فرض کنید که اندازه σ_z ، بین اندازه های سایر تنشهاست. از مسأله فیزیکی نتیجه می شود که:

$$\sigma_x = \sigma_3, \sigma_y = \sigma_1 = 0, \sigma_x < \sigma_z < \sigma_y$$

که $\sigma_z = \sigma_2$ و قرارداد علامت $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ برقرار است. در بسیاری از موارد با استفاده از دایره مور می توان نمایش سودمند و روشن از حالت تنش ارائه داد. در این مورد شکل (۳۳-۱) کمک مناسبی است.



شکل ۱-۳۳) دایره تنش مور مربوط به شکل ۱-۳۲.

تنش فشاری لازم برای ایجاد تسلیم عبارت است از $\sigma_p = 2k$ و نیروی متناظر F برابر است با $2Kwb$. این مثال ساده، اساس نظریه میدان خط لغزش را تا حدود زیادی روشن می‌کند. با دانستن امتدادهای برش ماکزیمم و جهت‌گیری تنشهای اصلی بر اساس فیزیک مسأله، می‌توان بارهای مورد نظر را بر حسب تنش تسلیم برشی K تعیین کرد. البته تعداد وضعیتهایی که با میدان خط لغزش متشکل از خطوط راست، مطابق شکل (۱-۳۲) قابل بیان است، چندان زیاد نیست.

۱-۶-۱- معادله‌های تنش

در تغییر شکل با کرنش صفحه‌ای، شارش فلز همواره با صفحه‌ای مفروض موازی است، بنابراین در امتداد عمود بر صفحه شارش، حرکت یا جابجایی فلز مشاهده نمی‌شود. پس در شکل (۱-۳۲)، شارش فلز در صفحه‌هایی موازی با صفحه $x-y$ رخ می‌دهد و در امتداد z فلز حرکت نمی‌کند. با در نظر گرفتن این دستگاه xyz و مفهوم حجم ثابت، در می‌یابیم که:

$$d\varepsilon_x = -d\varepsilon_y, \quad d\varepsilon_z = 0 \quad (1-124)$$

$$\dot{\varepsilon}_x = -\dot{\varepsilon}_y, \quad \dot{\varepsilon}_z = 0 \quad (1-125)$$

$$d\gamma_{xy} \neq 0, \quad d\gamma_{yz} = d\gamma_{zx} = 0 \quad (1-126)$$

$$\dot{\gamma}_{xy} \neq 0, \quad \dot{\gamma}_{yz} = \dot{\gamma}_{zx} = 0 \quad (1-127)$$

و بنابراین

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0 \quad (1-128)$$

پس σ_z باید تنش اصلی باشد و $\sigma_z = \sigma_y = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y)$ بنابراین σ_y باید با تنش میانگین یا تنش هیدرواستاتیکی در هر نقطه از میدان تغییر شکل معادل باشد. اگر محورهای x و y امتدادهای اصلی را نشان دهند، نتیجه می شود که:

$$\sigma_y = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \sigma_{\text{میانگین}}$$

$$\sigma_1 = \sigma_y + k, \quad \sigma_3 = \sigma_y - k \quad (129-1)$$

پس نکته ای مهم که همواره در مورد تغییر شکل با کرنش صفحه ای صادق است، آن است که تنش میانی، σ_y ، همواره با تنش میانگین برابر است. در حقیقت این تنش مؤلفه هیدرواستاتیکی حالت تنش است و بر تسلیم تأثیر نمی گذارد.

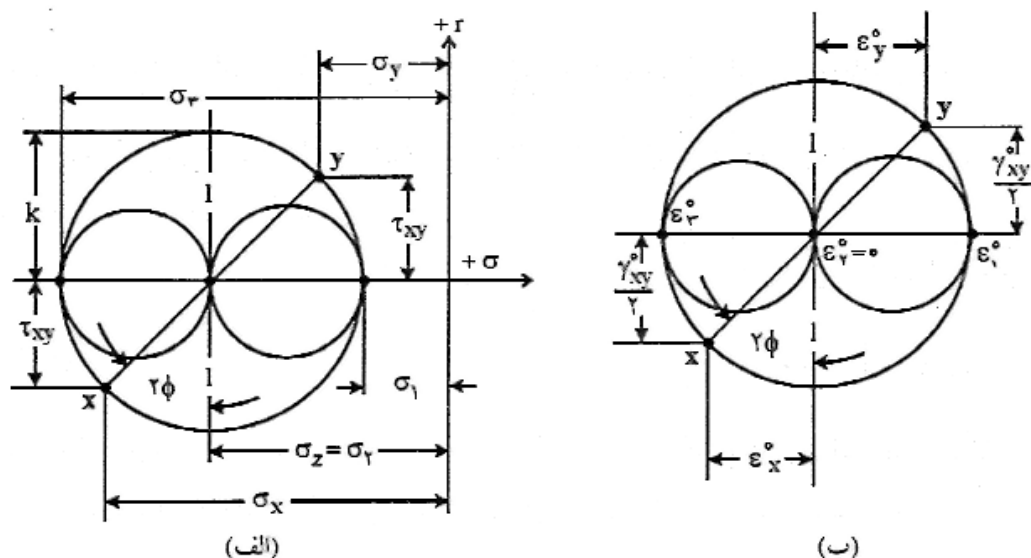
با توجه به رابطه بین دایره های مور تنش و کرنش برای شارش مومسان، مکان تنش میانگین با مکان دایره کرنش که در آن $d\varepsilon = 0$ ، متناظر است. این نتیجه از معادله های (124-1) و (128-1) بدست می آید. از معادله (124-1) این نتیجه نیز حاصل می شود که کرنش صفحه ای با واپسش در برش محض معادل است.

بنابراین تغییر شکل با کرنش صفحه ای حالتی از تنش را ایجاد می کند که می توان آن را تغییر شکل برشی محض، همراه با تنش هیدرواستاتیکی در نظر گرفت که در ناحیه تغییر شکل، از نقطه ای تا نقطه دیگر تغییر می کند. تسلیم هنگامی رخ می دهد که تنش تسلیم برشی، K ، ایجاد شود و بتوان نشان داد که معیار تسلیم زیر در این وضعیت صادق است:

$$K^2 = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2 \quad (130-1)$$

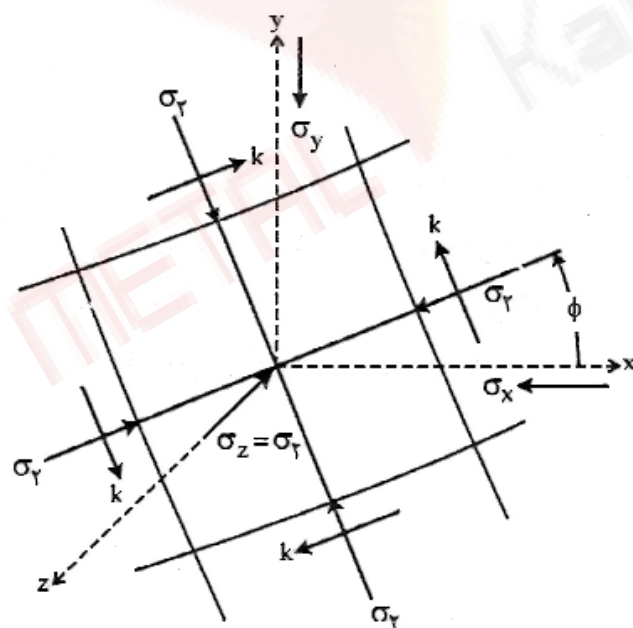
$$2k = \frac{2Y}{\sqrt{3}} \quad \text{توجه کنید که در معیار فون میز}$$

در ارتباط با گفته های اخیر، حالت کلی تنش در یک نقطه را که در شکل (33-1) نشان داده شده است در نظر بگیرید. سه تنش قائم به دلخواه فشاری در نظر گرفته شده اند و σ_z همان تنش میانی σ_y است و σ_x فشار تراز σ_y است. دایره مور مربوط به تنش در شکل (34-1) است. شکل (34-1 ب) دایره مور متناظر را برای کرنش نشان می دهد.



شکل (۳۴-۱) دایره‌های مور برای (الف) تنش و (ب) آهنگ کرنش در حالت کلی تنش در یک نقطه

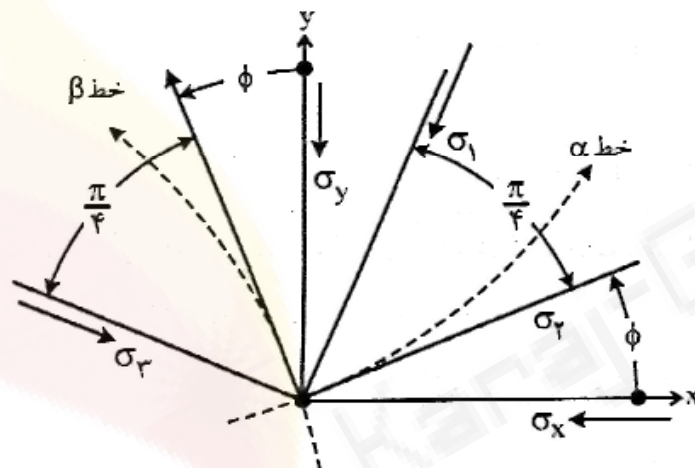
صفحه‌های برش ماکزیمم بر هم عمودند. شبکه‌ای از این قبیل خطوط متعامد، میدان خط لغزش را می‌سازد. در شکل (۳۵-۱) جزیی در میدان، در حالت کلی که خطوط راست نیستند و خمیده‌اند، نشان داده شده است. تنش برشی K ، در طول خطوط لغزش عمل می‌کند، در حالی که تنش میانگین σ_r ، (که با $-p$ ، فشار قائم میانگین برابر است) عمود بر این خطوط و بروجه جزء عمل می‌کند. جزء نشان داده شده در شکل (۳۵-۱)، در مقایسه با شکل (۳۳-۱) به اندازه زاویه ϕ نسبت به محور x چرخش یافته است. این مقدار چرخش با زاویه 2ϕ روی نموداری مانند نمودار شکل (۳۴-۱-الف) متناظر است. هنگامی که در طول خط لغزش حرکت می‌کنیم، اندازه σ_r از نقطه‌ای تا نقطه دیگر تغییر می‌کند و همین تغییر است که در هنگام استفاده از این نظریه بیشترین اهمیت را دارد.



شکل (۳۵-۱) تنش در یک جزء کوچک خمیده - خط

به منظور پی‌ریزی معادله‌های ضروری و به‌کارگیری درست این معادله‌ها، باید از قراردادی سازگار استفاده کنیم. معمولاً خانواده‌های خطوط لغزش متعامد را به صورت خطوط α و β نامگذاری می‌کنند و باید آنها را از یکدیگر تمیز داد. زاویه چرخش ϕ برای حرکت پادساعتگرد نسبت به یک مبنا (در اینجا محور x)، مثبت فرض می‌شود و امتداد بزرگترین تنش اصلی جبری، σ_1 ، در ربع‌های اول و سوم دستگاه $\alpha - \beta$ قرار می‌گیرد. به همین ترتیب خطوط β در ربع‌های اول و سوم که به وسیله محورهای تنش σ_1 و σ_3 تشکیل می‌شوند، قرار می‌گیرند. این وضعیت در شکل (۱-۳۶) نشان داده شده است. توجه کنید که تنش صفر از هر تنش فشاری بزرگتر است، اگر همه تنش‌های اصلی فشاری باشند، آنگاه کوچکترین تنش فشاری، از لحاظ جبری از همه بزرگتر است. در حالت کرنش صفحه‌ای، چون τ_{zx} و τ_{yz} صفرند، معادله‌های تعادل به معادله‌های زیر خلاصه می‌شوند:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 = \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \quad (1-131)$$



شکل ۱-۳۶ قرارداد تعریف خطوط α و β

و از شکل (۱-۳۴) داریم:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y - K \sin 2\phi \\ \sigma_y &= \sigma_y + K \sin 2\phi \\ \tau_{xy} &= K \cos 2\phi \end{aligned} \quad (1-132)$$

با ترکیب معادله‌های (۱-۱۳۱) و (۱-۱۳۲) و سپس دیفرانسیل‌گیری، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} - 2K \cos 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} - 2K \sin 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + 2K \cos 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} - 2K \sin 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (1-133)$$

معادله‌های (۱۳۳-۱) را می‌توان در مورد هر مجموعه از محورهای دلخواه x' و y' در صفحه xy با اندازه‌گیری زاویه ϕ از x' تا خط α ، به کار برد. هرگاه در نقطه O محورهای x' و y' بر خطوط α و β مماس باشند، داریم $\phi = 0$. آن‌گاه معادله‌های (۱۳۳-۱) به توابعی یک متغیره تبدیل می‌شوند و مشتقهای جزئی ضروری نیستند. پس:

$$\frac{d\sigma_y}{dx'} - \gamma K \frac{d\phi}{dx'} = 0$$

$$\frac{d\sigma_y}{dy'} + \gamma K \frac{d\phi}{dy'} = 0 \quad (134-1)$$

که پس از انتگرال‌گیری نتیجه می‌شود:

$$\sigma_y - \gamma K \phi = C_1 = \text{مقدار ثابت در طول یک خط } \alpha$$

$$\sigma_y + \gamma K \phi = C_2 = \text{مقدار ثابت در طول یک خط } \beta \quad (135-1)$$

به لحاظ فیزیکی، حرکت در طول یک خط α یا β ، سبب می‌شود که σ_y به صورت زیر تغییر کند:

$$\Delta\sigma_y = \gamma K \Delta\phi_\alpha \quad \text{روی خط } \alpha$$

یا

$$\Delta\sigma_y = -\gamma K \Delta\phi_\beta \quad \text{روی خط } \beta \quad (136-1)$$

اگر به جای σ_y از $-p$ ، (فشار قائم بر یک خط لغزش) استفاده کنیم، معادله‌های (۱۳۵-۱) را معادله‌های هنکی می‌نامند و آنها را به صورت کلی زیر می‌نویسند:

$$\Delta P = -\gamma K \Delta\phi_\alpha \quad \text{یا} \quad P + \gamma K \phi = C_1 \quad (\text{خط } \alpha)$$

$$\Delta P = \gamma K \Delta\phi_\beta \quad \text{یا} \quad P - \gamma K \phi = C_2 \quad (\text{خط } \beta)$$

به طور کلی مقادیر C_1 و C_2 در خطوط لغزش مختلف متفاوتند، اما معمولاً محاسبه عددی این ثابتها لازم نیست. در حقیقت، معادله‌های (۱۳۵-۱) یا (۱۳۶-۱) معادله‌های تعادل‌اند که در طول یک خط لغزش بیان می‌شوند و شمول تعادل یکی از مهمترین اختلافهای بین نظریه میدان خط لغزش و رهیافت کران بالایی است.

۱-۶-۲- شرایط مرزی

صرفنظر از نوع نظریه میدان خط لغزش برای مسأله‌ای خاص، معمولاً یکی از تنشهای اصلی در یکی از مرزها تعیین می‌شود. در میان مناسب‌ترین مرزها می‌توان به مرزهای زیر اشاره کرد:

الف) سطح آزاد (منطقه مومسان گسترش یافته در ورای ابراز). چون در سطح آزاد، تنشهای قائم یا

مماس وجود ندارند، خطوط α و β در چنین سطحی با زاویه 45° برخورد می‌کنند.

(ب) فصل مشترک بدون اصطکاک (بین فلز و ابزار). همچون در مورد الف، خطوط α و β یکدیگر را با زاویه 45° قطع می‌کنند.

(ج) فصل مشترک با اصطکاک چسبنده. هر جا خطوط لغزش در فصل مشترکی با اصطکاک چسبنده با یکدیگر برخورد کنند، آنگاه در فصل مشترک به K می‌رسیم. بنابراین یک خط لغزش مثلاً α ، با فصل مشترک مماس می‌شود و خط آن در امتداد قائم آن را قطع می‌کند.

می‌توان از معادله‌های (۱۳۵-۱) برای تعیین یک قید اضافی در مورد شکل میدانی که از لحاظ استاتیکی قابل قبول است، استفاده کرد. ناحیه محصور بین دو خط α و β در شکل (۱-۳۷) را در نظر بگیرید. اختلاف بین σ_2 در A و C را می‌توان با پیمودن دو مسیر مختلف تعیین کرد. نخست مسیر A به D به C را در نظر بگیرید. در حرکت روی خط α از A به D داریم:

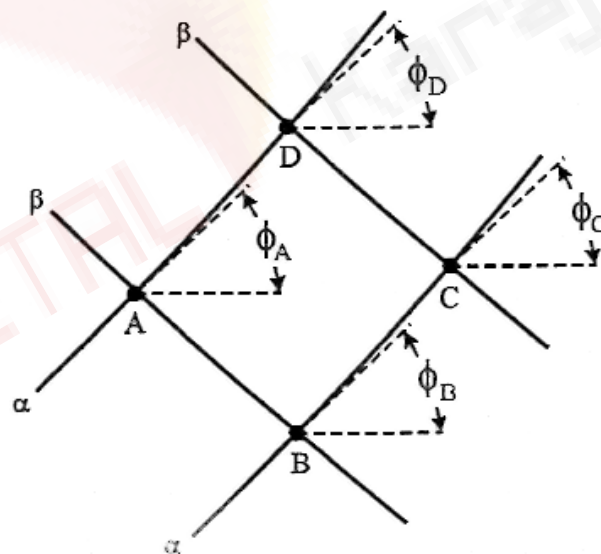
$$\sigma_{2D} = \sigma_{2A} + 2K(\phi_D - \phi_A) \quad (1-137 \text{ الف})$$

در حرکت روی خط β از D به C داریم:

$$\sigma_{2C} = \sigma_{2D} - 2K(\phi_C - \phi_D) \quad (1-137 \text{ ب})$$

بنابراین با تلفیق معادله‌های (۱-۱۳۷ الف) و (۱-۱۳۷ ب) نتیجه می‌شود:

$$\sigma_{2C} - \sigma_{2A} = 2K(2\phi_D - \phi_A - \phi_C) \quad (1-138)$$



شکل ۱-۳۷ دو جفت خط α و β برای تحلیل تغییر در تنش قائم میانگین، از طریق پیمودن دو مسیر مختلف

حال مسیر A به B به C را در نظر بگیرید. در حرکت روی خط β از A به B داریم:

$$\sigma_{\beta B} = \sigma_{\beta A} - 2K(\phi_B - \phi_A) \quad (1-139 \text{ الف})$$

سپس در حرکت از B به C روی خط α داریم:

$$\sigma_{\alpha C} = \sigma_{\beta B} + 2K(\phi_C - \phi_B) \quad (1-139 \text{ ب})$$

پس

$$\sigma_{\alpha C} - \sigma_{\beta A} = -2K(2\phi_B - \phi_A - \phi_C) \quad (1-139 \text{ ج})$$

از برابر قرار دادن معادله‌های (1-139 ج) و (1-138) نتیجه می‌شود:

$$\phi_A - \phi_B = \phi_D - \phi_C \quad \text{یا}$$

$$\phi_A - \phi_D = \phi_B - \phi_C \quad (1-140)$$

معادله (1-140) ایجاب می‌کند که شبکه‌ای از خطوط α و β چنان رسم شود که تغییر ϕ در طول هر خانواده مفروض از خطوطی که از یک نقطه با خانواده مخالف، به سوی نقطه تقاطع دیگری از همین نوع حرکت می‌کنند، یکسان باشد. این شرط به شرط تعامد افزوده می‌شود و نشان می‌دهد که تغییر زاویه‌ای، نه طول واقعاً پیموده شده، از اهمیت خاصی برخوردار است.